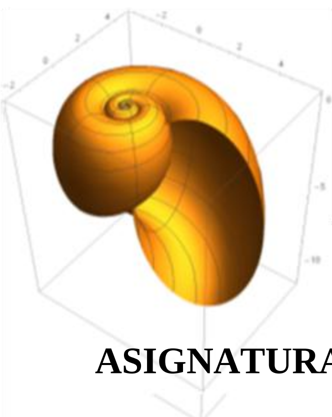
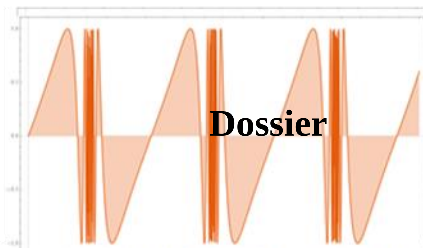
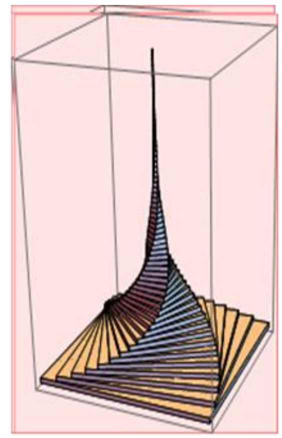
UNIVERSIDAD DE LAS REGIONES AUTÓNOMAS DE LA COSTA CARIBE NICARAGÜENSE URACCAN RECINTO NUEVA GUINEA.

Coordinación de tecnología de la construcción







Dossier

ASIGNATURA : MATEMÁTICA I

ÁREA DE ESTUDIO : TECNOLOGÍA DE LA CONSTRUCCIÓN

ELABORADO POR: EQUIPO DEL ÁREA DE TECNOLOGÍA DE LA CONSTRUCCIÓN

lugar y fecha: Nueva Guinea RACCS, julio de 2018

ÍNDICE

Unidad I: Geometría Analítica vectorial:

1.1.- Sistema Coordenado Rectangular en R^3

Recordemos que para situar un punto en el plano se necesitan dos números reales. Si se usa un sistema de coordenadas rectangulares o cartesiano estos números vienen dados por una pareja ordenada (a, b) donde a es la coordenada en x y b la coordenada de y. La pareja (a, b) son coordenadas del punto P en el plano.

El producto cartesiano $\boldsymbol{R^3}$ es el conjunto de todas las tríadas ordenadas de números reales (x, y, z). Este producto cartesiano también es conocido como el espacio tridimensional. Las componentes son conocidas como coordenadas. Similarmente lo que ocurre en $\boldsymbol{R^2}$, una tríada ordenada (x, y, z) de números reales se le puede asociar un único punto P del espacio geométrico tridimensional y recíprocamente un punto P en el espacio geométrico se le hace corresponder una única tríada ordenada.

Para localizar un punto (x, y, z) en $\boldsymbol{R^3}$ podemos hacerlo primero ubicando su proyección en el plano xy, este es el punto $(x, y, 0)$ y luego subir o bajar en el punto z unidades, según el signo que tenga z.

Ej # 1

Trazar en el plano los siguientes puntos $(1,3,0)$ y $(1,3,2)$

Sol:

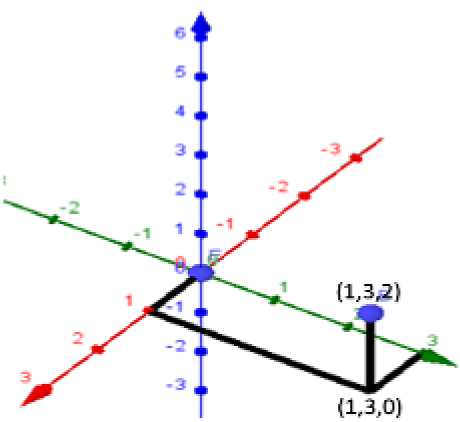


Figura 1

Usando el programa GeoGebra.

Ej # 2

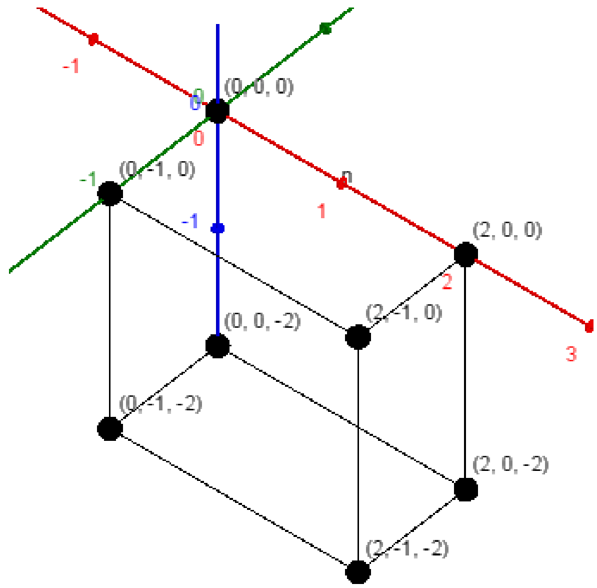
Localice los puntos $(2, -1, -2)$ y $(-1, 4, -2)$ en el plano tridimensional y construya el cubo

Para la construcción de los cubos es necesario encontrar todas las triadas, que se necesitan para la construcción.

Sol:

En la triada $(\mathbf{2}, -\mathbf{1}, -\mathbf{2})$**,** los nuevos puntos son:

Figura 2



$(\mathbf{2}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$

$(\mathbf{2}, -\mathbf{1}, \mathbf{0})$

$(\mathbf{2}, \mathbf{0}, -\mathbf{2})$

$(\mathbf{0}, -\mathbf{1}, \mathbf{0})$

$(\mathbf{0}, -\mathbf{1}, -\mathbf{2})$

$(\mathbf{0}, \mathbf{0}, -\mathbf{2})$

$(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$

$(\mathbf{2}, -\mathbf{1}, -\mathbf{2})$

Sol:

En la triada $(-1, 4, -2)$**,** los nuevos puntos son:

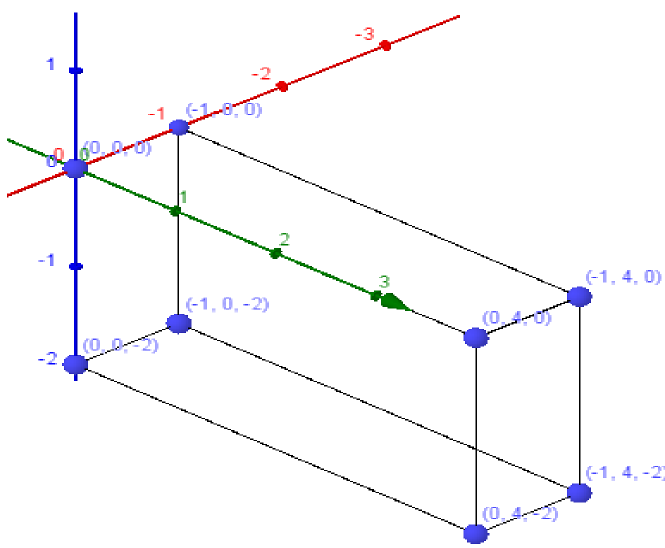


Figura 3

$(-\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$

$(-\mathbf{1}, \mathbf{4}, \mathbf{0})$

$(-\mathbf{1}, \mathbf{0}, -\mathbf{2})$

$(\mathbf{0}, \mathbf{4}, \mathbf{0})$

$(\mathbf{0}, \mathbf{4}, -\mathbf{2})$

$(\mathbf{0}, \mathbf{0}, -\mathbf{2})$

$(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$

$(-\mathbf{1}, \mathbf{4}, -\mathbf{2})$

El plano de divide en ocho partes lo que se le conoce octantes.

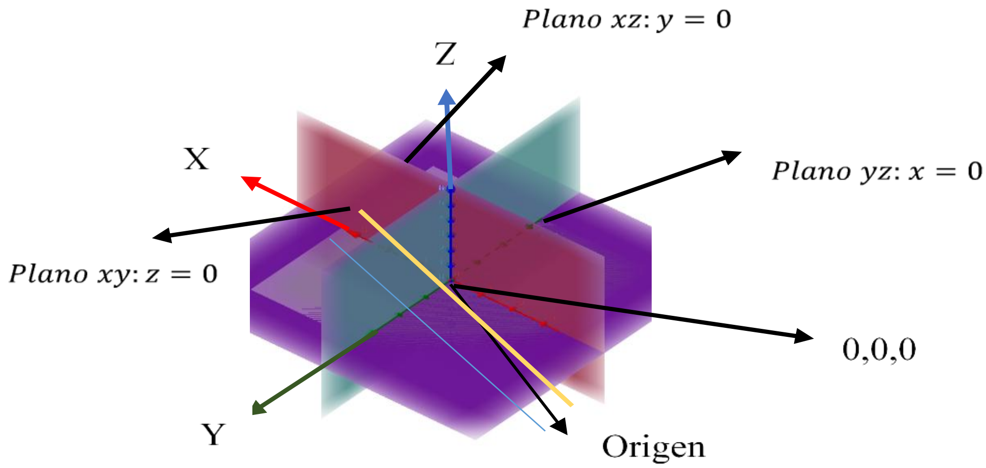


Figura 4

Los planos $x = 0, y = 0, z = 0$ dividen al espacio en ocho octantes.

Ej # 3

Trace la gráfica de la ecuación $\boldsymbol{y} = -2$ en R^2 y R^3

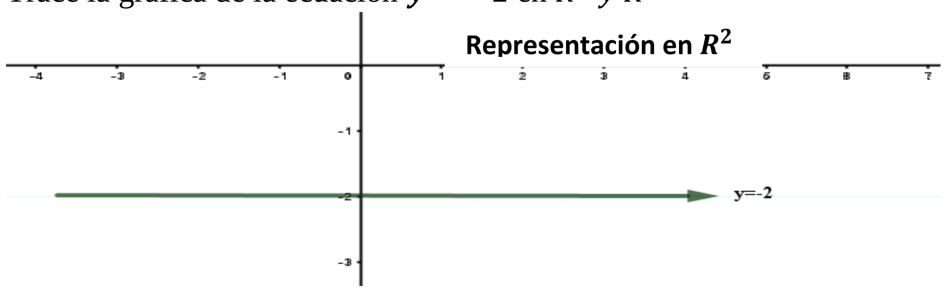


Figura 5

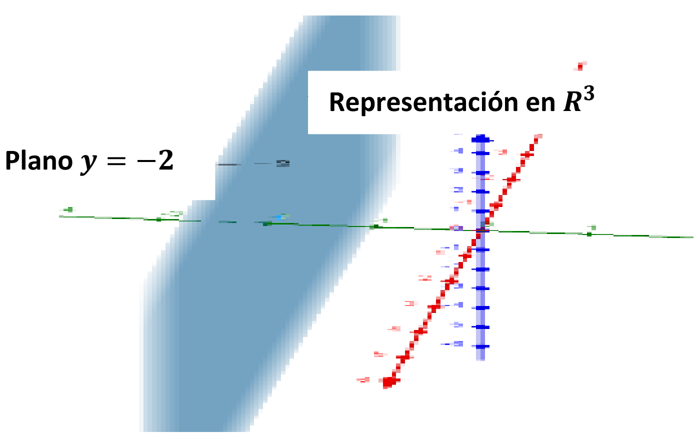


Figura 5

Ejercicios

I. Graficar los puntos y construir su respectiva figura

$\boldsymbol{a})\ (\mathbf{2,3,4});\ \boldsymbol{b})(\mathbf{1,-5,-1});\ \boldsymbol{c})(\mathbf{3,2-1})$; **d)**$(\mathbf{4,-2,-5})$

II. Trazar el plano de:

$\boldsymbol{a})\ \boldsymbol{y} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}; \boldsymbol{b})\ \boldsymbol{x} = -\mathbf{4}; \boldsymbol{c})\ \ \boldsymbol{z} = -\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{2}}$

1.2.- Distancia y punto medio en R^3.

Si $A(x_1, y_1, z_1)$ $B(x_2, y_2, z_2)$ son dos puntos de una recta paralela al eje x, entonces la distancia dirigida de $A\ y\ B$, denotada por $\overline{AB}$, está dada por

$\overline{AB} = x_2 - x_1$

Si $C(x, y_1, z)$ y $D(x, y_2, z)$ son dos puntos de una recta paralela al eje y, entonces la distancia dirigida de C $y\ D$, denotada por $\overline{CD}$, está dada por

$\overline{CD} = y_2 - y_1$

Si $E(x, y, z_1)$ y $F(x, y, z_2)$ son dos puntos de una recta paralela al eje y, entonces la distancia dirigida de E $y\ D$, denotada por $\overline{EF}$, está dada por

$\overline{EF} = z_2 - z_1$

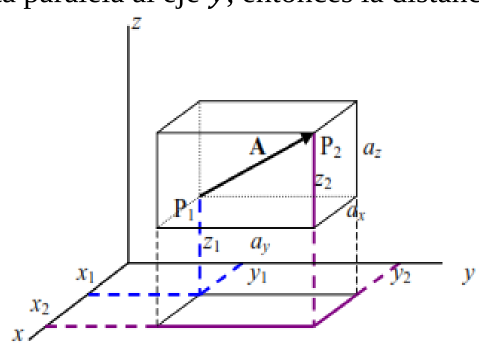


Figura 6

Ej # 5

La distancia dirigida $\overline{PQ}$ del punto $P(2, -5, -4)$ al punto $Q(2, -3, -4)$, para y.

Sol:

$\overline{PQ} = (-3) - (-5) = 2$

La distancia no dirigida entre los puntos $P_1(x_{1,}y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_{2,}z_2)$ está dada por

$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + \left(y_2 - y_{1,}\right)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Ej # 6

Calcule la distancia no dirigida entre los puntos $P(-3, 4, -1)$ y $Q(2, 5, -4)$

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{\left(2 - (-3)\right)^2 + (5 - 4)^2 + \left(-4 - (-1)\right)^2} = \sqrt{35}$$

Las coordenadas del punto medio del segmento de recta cuyos extremos son $\boldsymbol{P_1(x_{1,}y_1, z_1)}$ y $\boldsymbol{P_2(x_2, y_{2,}z_2)}$ están dadas por $\quad \boldsymbol{\bar{x}} = \frac{(\boldsymbol{x_1+x_2})}{\mathbf{2}};\ \ \boldsymbol{\bar{y}} = \frac{(y_1+y_2)}{2};\ \boldsymbol{\bar{z}} = \frac{(\boldsymbol{z_1+z_2})}{\mathbf{2}}$

Ej # 7

Encontrar el punto medio del segmento de recta $\boldsymbol{AB}$. Que tiene por puntos $\boldsymbol{A}(-\mathbf{5},\mathbf{6},-\mathbf{2})$ y $\boldsymbol{B}=(\mathbf{9},-\mathbf{4},\mathbf{0})$

$\bar{x}=\frac{(-5+9)}{2}=\mathbf{2}$ $\quad\bar{y}=\frac{6-4}{2}=\mathbf{1}$ $\quad\bar{z}=\frac{-2+0}{2}$=**-1**

De modo que el nuevo punto es $C(2\,,1,-1)$

1.3.- Vectores de posición y trasladados.

En Física, la posición, **vector de posición** ó vector posición de un cuerpo *respecto a un sistema de referencia* se define como el vector que une el lugar ocupado por el cuerpo con el origen del sistema de referencia. Su expresión, *en coordenadas cartesianas*:

$\vec{r}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}$

De donde:

$\vec{r}$: Es el vector de posición

x,y,z: Son las coordenadas del vector de posición

$\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$: son los vectores unitarios en las direcciones de los ejes ox,oy,oz respectivamente.

La unidad de medida de la posición en el Sistema Internacional es el metro $[m]$. Como todo vector, el vector posición en Física cuenta con módulo, dirección y sentido. El módulo del vector posición es la distancia que separa al cuerpo del origen del sistema de referencia. Para calcularlo puedes utilizar la siguiente fórmula:

$|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Ej # 8

Hallar el vector posición y su módulo para los siguientes puntos:

a) $P_1(-1{,}3{,}6)$

Sol:

Usando la definición de vector posición $\vec{r}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}$, nos quedaría de la siguiente manera:

$\vec{r}=(-1\vec{\imath}+3\vec{\jmath}+6\vec{k})$

Para saber cuál es la magnitud usamos.

$|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$|\vec{r}|=\sqrt{(-1)^2+(3)^2+(6)^2}=\sqrt{46}$

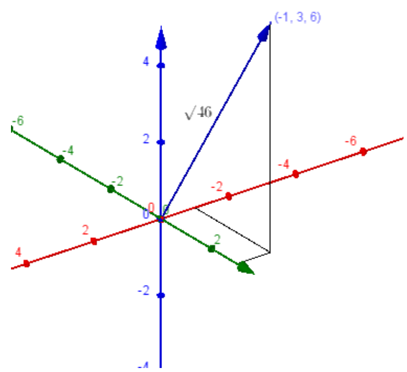


Figura 7

b) $P_2(-3{,}4{,}7)$

Sol:

Usando la definición de vector posición $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$, nos quedaría de la siguiente manera:

$\vec{r} = (-3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 7\vec{k})$

Para saber cuál es la magnitud usamos.

$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$|\vec{r}| = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2 + (7)^2} = \sqrt{74}m$

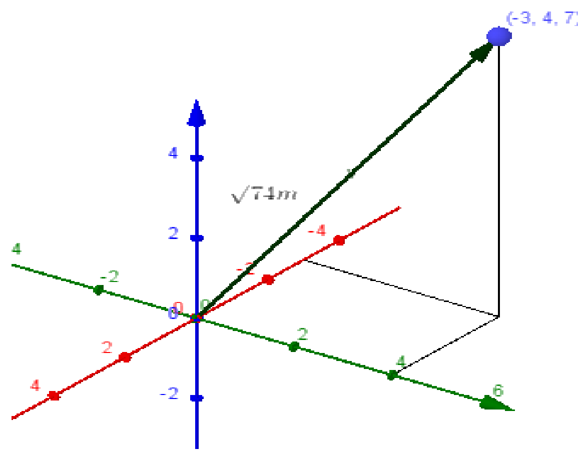


Figura 8

Ejercicios

Representar las siguientes triadas y calcular el vector posición y la magnitud

$\boldsymbol{a})$ $(1,2,4)$ $\boldsymbol{b})(1,2,5)$ $\boldsymbol{c})$ $(1,-2,4)$ $\boldsymbol{d})$ $(-1,2,4)$ $\boldsymbol{e})$ $(1,3-4)$

Encontrar la distancia no dirigida y el punto medio del segmento de las rectas de las triadas dadas

1) $A(3,4,2)$ $\boldsymbol{B}(1,6,3)$; **2**) $\boldsymbol{A}(4,-3,2)$ $\boldsymbol{B}(-2,3,-5)$; **3**) $\boldsymbol{A}(2,-,4,1)$ $\boldsymbol{B}\left(\frac{1}{2},2,3\right)$

1.4.- Magnitud y Dirección. Vector Nulo y Unitario.

Magnitud y Dirección.

Magnitud física es todo lo que se puede medir, siendo la medida la comparación de una cantidad de cierta magnitud con la unidad elegida para medir ésta. No es una magnitud física el dolor, alegría, tristeza, etc.

Magnitud escalar es una magnitud física que no necesita asociarle una dirección, para que queden completamente especificada.

Ejemplo: tiempo, masa, volumen, temperatura.

Magnitud vectorial es una magnitud que para estar completamente especificada es necesario conocer tanto su valor como su dirección de aplicación.

Ejemplo: desplazamiento, velocidad, fuerza, campo eléctrico.

La magnitud y orientación de un vector $\vec{p} = (x, y, z)$ se define como:

$||\vec{p}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Para encontrar la dirección del vector $\vec{p} = (x, y, z)$

$Cos\ (directores)\ cos\alpha = \frac{x}{\|\vec{p}\|};\ cos\beta = \frac{y}{\|\vec{p}\|}, cos\gamma = \frac{z}{\|\vec{p}\|},$

Usando los cosenos directos en R^3 nos encontramos con lo siguiente:

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

Se cumple que $\|\vec{p}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$, se cumple que:

$\frac{x^2}{\|\vec{p}\|^2} + \frac{y^2}{\|\vec{p}\|^2} + \frac{z^2}{\|\vec{p}\|^2} = 1$

Ej # 9:

Encontrar la magnitud y vectores del siguiente vector $\vec{p} = (4,3,1)$

$\|\vec{p}\| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{26}$

$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{26}}\right);$ $\beta = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{26}}\right);$ $\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{26}}\right)$

Vector Nulo y Unitario.

El vector nulo se denota con $\vec{0} = (0,0,0)$

Un vector se dice que es unitario si su norma es 1. Es común escribir $\hat{v}$ para indicar que este vector es unitario. $\frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$

Ej # 10:

Sea $\vec{w} = (1,0,2)$ entonces

$\|\vec{w}\| = \sqrt{5}$ entonces $\left\|\frac{\overrightarrow{w}}{\|\vec{w}\|}\right\| = \left\|\frac{1}{\|\vec{w}\|} * \vec{w}\right\| = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$

Un vector $\vec{w} = (cos\alpha, sen\alpha)$ es unitario para todo $\alpha \in R$, pues $\|(cos\alpha, sen\alpha\| = \sqrt{\cos^2\alpha + sen^2\alpha} = 1$

1.5.- Suma y resta gráfica y analítica. Propiedades.

La suma de dos vectores es un nuevo vector que se construye de la siguiente manera: si se ubica al primer vector con el punto inicial en el origen, en el punto final se colocará el punto inicial del segundo vector. El vector suma (o vector resultante) tendrá como punto inicial el origen y el punto final se coloca en el mismo lugar que el punto final del segundo vector.

Si $\vec{v} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) \in R^3$ $\vec{w} = (\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3) \in R^3$

$\boldsymbol{\vec{v}} + \boldsymbol{\vec{w}} = \vec{v}_1 + \vec{w}_1, \vec{v}_2 + \vec{w}_2, \vec{v}_3 + \vec{w}_3$

$\boldsymbol{\vec{v}} - \boldsymbol{\vec{w}} = \vec{v}_1 - \vec{w}_1, \vec{v}_2 - \vec{w}_2, \vec{v}_3 - \vec{w}_3$

Ej # 11:

Sea $\boldsymbol{\vec{v}} = (1,3,4)$ y $\vec{w} = (\mathbf{3}, 1,4)$

Encontrar

a).$\vec{\boldsymbol{v}} + \vec{\boldsymbol{w}}$

b) $\vec{\boldsymbol{v}} - \vec{\boldsymbol{w}}$

Sol:

a).$\vec{\boldsymbol{v}} + \vec{\boldsymbol{w}} = \big((1+3),(3+1),(4+4)\big) = (\mathbf{4},\mathbf{4},\mathbf{8})$

b) $\vec{\boldsymbol{v}} - \vec{\boldsymbol{w}} = ((1-3),(3-1),(4-4)) = (\mathbf{-2},\mathbf{2},\mathbf{0})$

Ejercicios

Exprese el vector en término de su módulo y de sus cosenos directores.

$\boldsymbol{a}) - 6i + 3j + 4k \qquad \boldsymbol{b}) - 3i + j - 3k$

$\boldsymbol{a})\ 2i - 2j + k \qquad \boldsymbol{b})\ 3i + 4j - 5k$

Obtener el vector unitario que tienen la misma dirección de $\boldsymbol{v}(\overrightarrow{\boldsymbol{p_1 p_2}})$

$\boldsymbol{a})\ p_1(4,-1,-6) \qquad p_2(5,7,-2)$

$\boldsymbol{b})\ p_1(-2,5,3) \qquad p_2(-4,7,3)$

$\boldsymbol{c})\ p_1(3,0,-1) \qquad p_2(-3,-9,4)$

Dados las siguientes triadas:

$\boldsymbol{A}(0,0,0);\ \boldsymbol{B}(7,3,4);\ \boldsymbol{C}(1,5,6);\ \boldsymbol{D}(-2,\frac{1}{2},7)$

Encontrar:

$\boldsymbol{a})\ \boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}$

$\boldsymbol{b})\ \boldsymbol{D} - \boldsymbol{B}$

$\boldsymbol{c})\ \boldsymbol{A} - \boldsymbol{D}$

$\boldsymbol{d})\ \boldsymbol{C} + \boldsymbol{D}$

1.6.- Multiplicación escalar gráfica y analítica. Propiedades.

Multiplicación por un escalar. Un escalamiento de un vector, por un factor $k \in R$, se logra multiplicando cada componente por el mismo número real k Considerando

$\vec{v} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) \in R^3$ y la escala $k \in R$, entonces

$k\vec{v} = (\boldsymbol{k}\vec{v}_1, k\vec{v}_2, k\vec{v}_3)$.

Ej # 12:

Sea $\vec{v} = (1,3,4)$

Encontrar

a). $2\vec{v}$

b). $\frac{1}{2}\vec{v}$

Sol:

$2\vec{v} = (2,6,8)$

$\frac{1}{2}\vec{v} = \left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},2\right)$

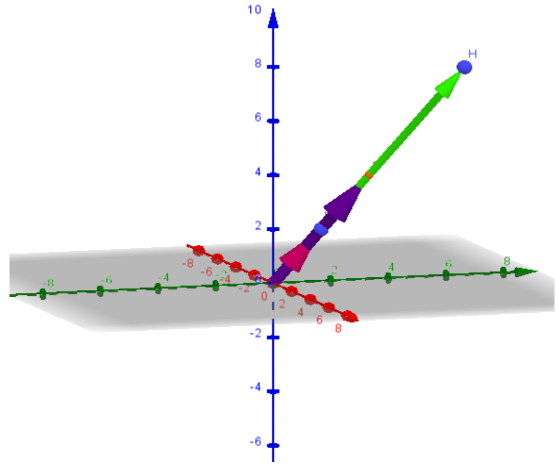


Figura 9

Ejercicios

Dados los vectores $A = (1,4,5)$ $B = (-2,1,7)$ $C = (4,-3,-1)$ $D = (-5,-7,1)$

Encontrar:

$a)\,\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{A}$ $\quad b)\,\mathbf{3}\boldsymbol{B}$ $\quad c)\,\mathbf{5}\boldsymbol{C}$ $\quad d)\,\mathbf{2}\boldsymbol{A}+\mathbf{4}\boldsymbol{B}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\boldsymbol{D}$

1.7.- Notación vectorial usando i, j, k.

$\vec{v} = (xi, yj, zk)$

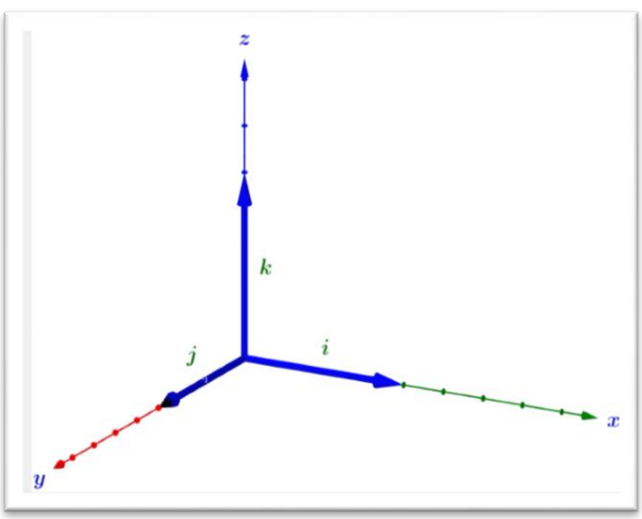


Figura 10

Ej # 13:

Representar en forma vectorial i, j, k $\vec{v} = (1,5,7) \rightarrow \vec{v} = (1i, 5j, 7k)$

1.8.- Producto Punto. Definición y propiedades.

Consideremos los vectores Si $\vec{v} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) \in R^3$y $\vec{w} = (\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3) \in R^3$, el producto punto (o escalar) $\vec{v} \cdot \vec{w}$ se define de la siguiente manera:

$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{v}_1 \cdot \vec{w}_1 + \vec{v}_2 \cdot \vec{w}_2 + \vec{v}_3 \cdot \vec{w}_3$

Ej # 14:

Sean $\vec{v} = (-1{,}3{,}4)$ y $\vec{w} = (1{,}0, \sqrt{2})$ encontrar $\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{w}}$

$\vec{v} \cdot \vec{w} = -1 * 1 + 3 * 0 + 4 * \sqrt{2} = 4\sqrt{2} - 1$

Norma

La norma define la longitud de un vector desde el punto de vista de la geometría euclidiana.

Se considera el vector $\vec{\boldsymbol{v}} = (\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \vec{\boldsymbol{v}}_3, \ldots \vec{\boldsymbol{v}}_n) \in \boldsymbol{R}^n$ y $\vec{\boldsymbol{w}} = (\vec{\boldsymbol{w}}_1, \vec{\boldsymbol{w}}_2, \vec{\boldsymbol{w}}_3, \ldots \vec{\boldsymbol{w}}_n) \in \boldsymbol{R}^n$**.** La norma de $\vec{\boldsymbol{v}}$ se denota $\|\vec{\boldsymbol{v}}\|$ y se define de la siguiente manera:

$\|\vec{\boldsymbol{v}}\| = \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}} \rightarrow \sqrt{\boldsymbol{v}_1^2 + \boldsymbol{v}_2^2 + \cdots + \boldsymbol{v}_n^2}$, la distancia de A a B se define como

$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \|\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}\|. \sqrt{(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1)^2 + (\boldsymbol{y}_2 - \boldsymbol{y}_1)^2 + (\boldsymbol{z}_2 - \boldsymbol{z}_1)^2}$ De igual manera se define la distancia entre vectores.

Si $\boldsymbol{\theta}$ es el ángulo entre los vectores $\boldsymbol{A}$ $\boldsymbol{y}$**,** diferentes del vector cero, entonces

$$cos\theta = \frac{\|A\|^2 + \|B\|^2 - \|B - A\|^2}{2\|A\|\|B\|}$$

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{B}\|\boldsymbol{cos\theta}$$

Ej # 15:

Sean $\vec{\boldsymbol{w}} = (\boldsymbol{1}, \boldsymbol{0}, \sqrt{\boldsymbol{2}})$ encontrar la $\|\vec{\boldsymbol{w}}\|$

Usando la $\|\vec{\boldsymbol{v}}\| = \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}} \rightarrow \sqrt{\boldsymbol{v}_1^2 + \boldsymbol{v}_2^2 + \cdots + \boldsymbol{v}_n^2}$

Sol:

$$\|\vec{\boldsymbol{w}}\| = \sqrt{(\boldsymbol{1})^2 + (\boldsymbol{0})^2 + (\sqrt{\boldsymbol{2}})^2} = \sqrt{\boldsymbol{3}}$$

Ej # 16:

Dados los vectores $\boldsymbol{A} = 6\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$

Determinar $cos\theta$ si θ es el ángulo entre $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$

Sol:

Primeramente se calcula $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$**,** $\|\boldsymbol{A}\|$ $\boldsymbol{y}$ $\|\boldsymbol{B}\|$

$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = 6 * 2 + 3 * 1 + (-5 * -3) = 12 + 3 + 15 = \boldsymbol{30}$

$\|\boldsymbol{A}\| = \sqrt{(\boldsymbol{6})^2 + (\boldsymbol{3})^2 + (-\boldsymbol{5})^2} = \sqrt{\boldsymbol{70}}$

$\|\boldsymbol{B}\| = \sqrt{(\boldsymbol{2})^2 + (\boldsymbol{1})^2 + (-\boldsymbol{3})^2} = \sqrt{\boldsymbol{14}}$

$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{B}\|\boldsymbol{cos\theta}$

Despejando $\boldsymbol{cos\theta}$

$$\frac{\boldsymbol{A\cdot B}}{\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{B}\|}=\boldsymbol{cos\theta}$$

$$\boldsymbol{cos\theta}=\frac{\boldsymbol{A\cdot B}}{\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{B}\|}\rightarrow\boldsymbol{cos\theta}=\frac{\mathbf{30}}{\sqrt{\mathbf{70}}*\sqrt{\mathbf{14}}}$$

Ej # 17:
Sean $A=(x,y,z)$ y $B=(1,-3,2)$

Encontrar la distancia $(A,B)=\|B-A\|$

Lo primero que se tienen que hacer es nombrar los puntos de las triadas como $(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{y_1},\boldsymbol{z_1})$ y el punto $(\boldsymbol{x_2},\boldsymbol{y_2},\boldsymbol{z_2})$

$$\rightarrow\sqrt{(x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2}$$

Ejercicios

1) Dados los vectores:
$\boldsymbol{A}=(-4,-2,4);\boldsymbol{B}=(2,7,1);\boldsymbol{C}=(6,-3,0);\boldsymbol{D}=(5,4,-3)$
Obtener:
   a) $A\cdot(B+C)$
   b) $A\cdot B)(C\cdot D)$
   c) $A\cdot D-B\cdot C$
   d) $(D\cdot B)A-(D\cdot A)B$

2) Demuestre, utilizando vectores que los puntos $(2,2,2),(0,1,2),(-1,3,3)\ y\ (3,0,1)$ son los vértices de un paralelogramo.
3) Calcular los cosenos de los ángulos del triángulo que tiene vértices en los puntos $A(0,0,0),B(4,-1,3)\ y\ C(1,2,3)$.

1.9. Ángulo entre vectores. Paralelismo y perpendicularidad. Proyecciones

El **ángulo** que se forman entre vectores $\vec{\boldsymbol{v}}=(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{y_1},\boldsymbol{z_1})$ $\vec{\boldsymbol{w}}=(\boldsymbol{x_2},\boldsymbol{y_2},\boldsymbol{z_2})$ viene dado por la expresión:

$$cos\alpha=\frac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}\rightarrow cos\alpha=\left|\frac{\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{w}}}{|\vec{\boldsymbol{v}}||\vec{\boldsymbol{w}}|}\right|$$

Ej # 18:

Dados los vectores $\vec{\boldsymbol{u}}=(\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{2})$ y $\vec{\boldsymbol{v}}=(-\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{1})$ calcular el ángulo que se forma entre ambos vectores

Sol: Se recomienda hacer los procedimientos por separados, para después sustituir de una sola vez en la ecuación los valores que resulten.

$$\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}=\big(\mathbf{1}*(-\mathbf{1})+(-\mathbf{1}*-\mathbf{1})+(\mathbf{2}*\mathbf{1})\big)=(-\mathbf{1}+\mathbf{1}+\mathbf{2})$$
$$\rightarrow\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}=\mathbf{2}$$

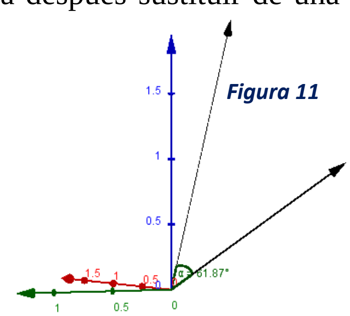


Figura 11

$$|\vec{\boldsymbol{u}}|=\sqrt{(\mathbf{1})^2+(-\mathbf{1})^2+(\mathbf{2})^2}=\sqrt{\mathbf{6}}$$

$$|\vec{\boldsymbol{v}}|=\sqrt{(-\mathbf{1})^2+(-\mathbf{1})^2+(\mathbf{1})^2}=\sqrt{\mathbf{3}}$$

$$cos\alpha = \left|\frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{6}} * \sqrt{\mathbf{3}}}\right| = \frac{2}{3\sqrt{2}} \rightarrow \alpha = arcos\left(\frac{2}{3\sqrt{2}}\right) \therefore \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{61.87°}$$

Se dice que dos vectores son paralelos si y sólo si uno de los vectores es múltiplo escalar de otro.

Ej # 19:

Los vectores $(3, -4,8)$ y $(\frac{3}{4}, -1, 2)$ son paralelos debido a que $(3, -4,8) = 4\left(\frac{3}{4}, -1,2\right)$.

Si $\boldsymbol{A}$ es cualquier vector, entonces $\mathbf{0} = \mathbf{0}\boldsymbol{A}$; de modo que, el vector cero es paralelo a cualquier vector.

Ej # 20:

Calcular el valor de $\boldsymbol{x}$ para que los siguientes vectores sean paralelos $A = (x, 4,8)$

$B = (3,2,4)$

Sol:

$$\frac{x}{3} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} \rightarrow \frac{x}{3} = 2 \therefore \boldsymbol{x} = \mathbf{6}$$

Se dice que dos vectores $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son ortogonales (o perpendiculares) si y sólo si $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \mathbf{0}$

Ej # 21:

Dados los vectores $(-4,5,0)$ y $(10,8,3)$ verificar si son ortogonales

Sol:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \big((-4 * 10) + (5 * 8) + (0 * 3)\big) = -40 + 40 + 0 \rightarrow \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \mathbf{0}$$

Si A es cualquier vector, $0 \cdot A = 0$, y por tanto, el vector cero es ortogonal a cualquier vector.

Ejercicios

Si θ es el ángulo entre $A\ y\ B$, calcule $cos\theta$

a) $A = (-4, -2,4)$; $B = (2,7, -1)$
b) $A = (6,3,7); B = (4,3, -2)$

1.10.- Producto Cruz; definición y propiedades.

El producto cruz entre dos vectores en R^3 es un vector que es simultáneamente perpendicular a $\boldsymbol{v}$ y a $\boldsymbol{w}$. Consideremos los vectores Si $\vec{v} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) \in R^3$ $\vec{w} = (\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3) \in R^3$. El producto $\vec{v}\ x\ \vec{w}$ se define de la siguiente manera:

$$\vec{v}\ x\ \vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = (v_2 w_3 - w_2 v_3)\boldsymbol{i} - (v_1 w_3 - w_1 v_3)\boldsymbol{j} + (v_1 w_2 - w_1 v_2)\boldsymbol{k}$$

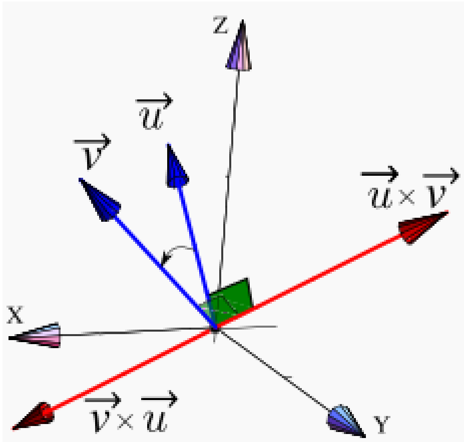


Figura 12

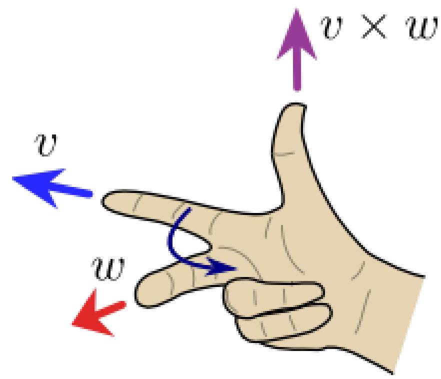


Figura 13

La posición del vector $\boldsymbol{v\,x\,w}$ se puede establecer con la "regla de la mano derecha",

Ej # 22:

Si $\boldsymbol{a} = 3i - j + 2k$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{b} = 2i + 2j - k$

Encontrar $\boldsymbol{a\;x\;b}$

$$\boldsymbol{a\;x\;b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \boldsymbol{-3i + 7j + 8k}$$

1.11.- Área y Volumen por Producto Cruz.

Longitud del producto vectorial

Sea $\boldsymbol{\theta}$ en el ángulo entre vectores distintos de cero $\boldsymbol{a\;y\;b}$ (medido de modo que $\boldsymbol{0 \le \theta \le \pi}$**.** Entonces $|\boldsymbol{a\;x\;b}| = |a||b|sen\theta$

Lo antes mencionado es numéricamente igual al área del paralelogramo determinado por $\boldsymbol{a\;y\;b,}$ cuya área es la mitad del área del paralelogramo

$A = |\boldsymbol{a\;x\;b}| = |a||b|sen\theta$

$$\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}|\boldsymbol{a\;x\;b}|$$

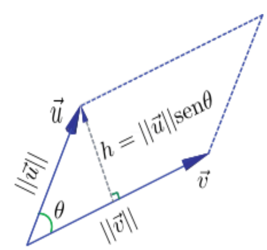


Figura 14

Ej # 22

Determine el área del triángulo con vértices $A(3,0,-1), B(4,2,5)$ y $C(7,-2,4)$

Sol:

$\overline{AB} = (1,2,6)$

$\overline{AC} = (4,-2,5)$

$$\overline{AB}x\overline{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 6 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 22i + 19j - 10k$$

Entonces el área del triángulo sería: $\frac{1}{2}|\boldsymbol{a} \ \boldsymbol{x} \ \boldsymbol{b}|$

$$\frac{1}{2}|\boldsymbol{a} \ \boldsymbol{x} \ \boldsymbol{b}| = \frac{1}{2}\sqrt{(22)^2 + (19)^2 + (-10)^2} = \mathbf{15.37} \ \boldsymbol{u}^2$$

Triple producto escalar y volumen:

El volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \ \boldsymbol{y} \ \boldsymbol{c}$ es el valor absoluto del triple producto escalar $\boldsymbol{a}.(\boldsymbol{b} \ \boldsymbol{x} \ \boldsymbol{c})$ es decir $V = |\boldsymbol{a}.(\boldsymbol{b} \ \boldsymbol{x} \ \boldsymbol{c})|$ donde también se puede expresar de la siguiente manera: $V = A * h = |\boldsymbol{bxc}||\boldsymbol{a}|\boldsymbol{cos\theta} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{bxc}||\boldsymbol{cos\theta}| = |\boldsymbol{a}.(\boldsymbol{bxc})|$

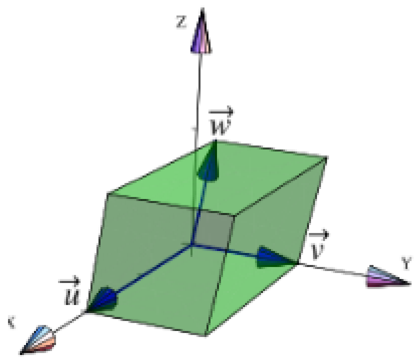


Figura 15

Ej # 23

El volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{u} = (1,3-2), \vec{v} = (2,1,4), \overline{w} = (-3,1,6)$

Sol:

$V = |\boldsymbol{a}.(\boldsymbol{b} \ \boldsymbol{x} \ \boldsymbol{c})| = \mathbf{80} \ \boldsymbol{u}^3$

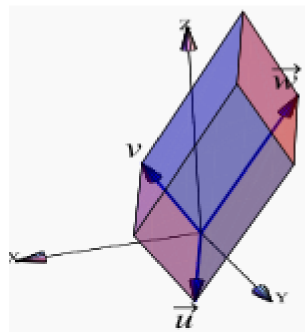


Figura 16

1.12.- Ecuaciones de la Recta en R^3

Si L es una recta que pasa por los puntos $P = (p_1, p_2, p_3), Q = (q_1, q_2, q_3)$ y si el vector $\vec{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{P}$ entonces:

1) La ecuación vectorial de L es $(x, y, z) = p + t\vec{u}, t \in R$

2) Despejando x, y, z obtenemos las ecuaciones paramétricas **de** $\boldsymbol{L}$: $\begin{cases} \boldsymbol{x(t) = p_1 + tu_1} \\ \boldsymbol{y(t) = p_2 + tu_2} \\ \boldsymbol{z(t) = p_3 + tu_3} \end{cases}$

3) Si cada $u_i \neq 0$, despejando t obtenemos las ecuaciones simétricas de $\boldsymbol{L}$ $\frac{\boldsymbol{x-p_1}}{\boldsymbol{u_1}} = \frac{\boldsymbol{y-p_2}}{\boldsymbol{u_2}} = \frac{\boldsymbol{z-p_3}}{\boldsymbol{u_3}}$

Ej # 24

Consideremos la recta L que pasa por los puntos $P = (1,3,2), Q = (2,1,4)$
Encontrar la ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas y las ecuaciones simétricas

Sol:

En este caso $\vec{\boldsymbol{u}} = \overrightarrow{\boldsymbol{PQ}} = \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{P} = (\mathbf{1}, -\mathbf{2}, \mathbf{2})$

La ecuación vectorial de L es $(x, y, z) = (1,3,2) + t(\mathbf{1}, -\mathbf{2}, \mathbf{2})$

La ecuación paramétrica $\begin{cases} \boldsymbol{x(t) = p_1 + tu_1 = 1 + t} \\ \boldsymbol{y(t) = p_2 + tu_2 = 3 - 2t} \\ \boldsymbol{z(t) = p_3 + tu_3 = 2 + 2t} \end{cases}$

Ecuaciones simétricas de $\boldsymbol{L}$ $\frac{\boldsymbol{x-p_1}}{\boldsymbol{u_1}} = \frac{\boldsymbol{y-p_2}}{\boldsymbol{u_2}} = \frac{\boldsymbol{z-p_3}}{\boldsymbol{u_3}} \rightarrow \frac{\boldsymbol{x-1}}{\mathbf{1}} = \frac{\boldsymbol{y-3}}{-\mathbf{2}} = \frac{\boldsymbol{z-2}}{\mathbf{2}}$

1.13.- Ecuaciones del Plano.

Si $\boldsymbol{N}$ es un vector dado diferente del vector cero $\boldsymbol{P_0}$ es un punto dado, entonces el conjunto de todos los puntos para los cuales $\boldsymbol{V}(\overrightarrow{\boldsymbol{P_0P}})$ y $\boldsymbol{N}$ son ortogonales define al plano que pasa por $\boldsymbol{P_0}$ y tiene a $\boldsymbol{N}$ como vector normal.

Si $\boldsymbol{P_0}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{z_0})$ es un punto de un plano y $\langle a, b, c \rangle$ es un vector normal al plano, entonces una ecuación del plano es:

$$\boldsymbol{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0}$$

Ej # 25
Obtener la ecuación del plano que contiene al punto (2,1,3) y tiene al vector $\boldsymbol{3i-4j+k}$ como un vector normal.
Sol:
El punto $\boldsymbol{P_0(x_0,y_0,z_0)}=(2,1,3)$ y los valores de la triada $\langle a,b,c\rangle=\ \boldsymbol{3i-4j+k}$ $\rightarrow(\boldsymbol{3,-4,1})$
Sustituyendo en la ecuación los valores que se tienen en la ecuación

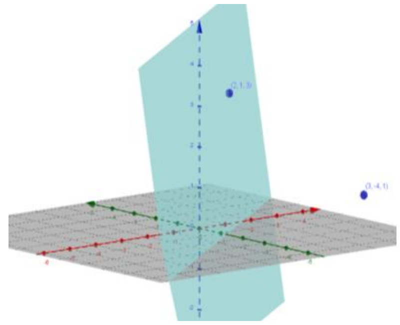


Figura 17

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-\ z_o)=0$
$3(x-2)-4(y-1)+(z-\ 3)$
$\rightarrow 3x-6-4y+4+z-3$
$\therefore \boldsymbol{3x-4y+z-5=0}$
Si $\boldsymbol{a,b\ y\ c}$ no son cero a la vez, la gráfica de una ecuación de la forma:$ax+by+cz+d=0$
es un plano y (a,b,c) es un vector normal al plano.
El punto $(\boldsymbol{3,-4,1})$ queda fuera del plano debido a que es un punto perpendicular al plano, (forma 90° con el plano)

Ej # 25
Determine una ecuación del plano que pasa por los puntos
$\boldsymbol{P(1,3,2),Q(3,-2,2)\ y\ R(2,1,3)}$

Sol:
Constatar si la ecuación está satisfecha por las coordenadas de los puntos $\boldsymbol{P,Q\ y\ R}$, entonces el plano los contendrá. Al sustituir $x,y\ y\ z$ en $ax+by+cz+d=0$ cada triada forma una ecuación, de donde cada una las coordenadas de los tres puntos se tienen las ecuaciones

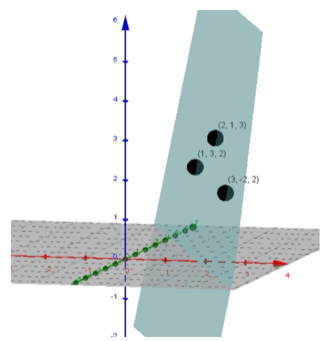


Figura 18

$$\begin{cases} a+3b+2c+d=0\ \boldsymbol{E_1} \\ 3a-2b+\ 2c+d=0\ \boldsymbol{E_2} \\ 2a+1b+3c+d=0\ \boldsymbol{E_3} \end{cases}$$
Si se resuelve este sistema de ecuaciones para $a,b\ y\ c$ en términos de d, se obtiene
$$a=-\frac{5}{9}d,b=-\frac{2}{9}d\ y\ c=\frac{1}{9}d$$
Sustituyendo los valores encontrados en la ecuación $ax+by+cz+d=0$, entonces resulta:
$-\frac{5}{9}dx-\frac{2}{9}dy+\frac{1}{9}dz+d=0$ Realizando la multiplicación de toda la ecuación por $-\frac{9}{d}\rightarrow 5x+2y-z-9=0\ \therefore\ 5\boldsymbol{x+2y-z-9=0}$ es la ecuación requerida.

Ejercicios
Obtener una ecuación del plano que contenga al punto $\boldsymbol{P}$ y tenga al vector $\boldsymbol{N}$ como vector normal
a) $P(3,1,2)\ \ N=(1,2,-3)$
b) $P(-3,2,5)\ \ N=(6,-3,-2)$
c) $P(0,1,2)\ \ N=(0,-1,-3)$

Determinar una ecuación del plano que contenga a los tres puntos

a) $(3,4,1),(1,7,1),(-1,-2,5)$
b) $(0,0,1),(2,7,1),(-2,3,3)$

1.14.- Posición entre Rectas, Planos, Rectas y Planos.

Ángulo entre dos planos

Un ángulo entre dos planos se define como el ángulo entre los vectores normales de los planos.
Existen dos ángulos entre dos planos.

Ej # 26

Determine la medida en radianes del ángulo agudo entre los planos.
$5x-2y+5z-12=0$ y $2x+y-7z+11=0$
Sol:
Para calcular el ángulo usaremos $cos\theta=\frac{N_1\cdot N_2}{\|N_1\|\|N_2\|}$
Siendo vectores normales

$$\theta=\cos^{-1}\frac{N_1\cdot N_2}{\|N_1\|\|N_2\|}$$

$\theta=\cos^{-1}\frac{(5,-2,5)\cdot(2,1,-7)}{54}\rightarrow\theta=\frac{2}{3}\pi$, el ángulo agudo entre los dos planos es el suplemento de θ, el cual es $\theta=\frac{1}{3}\pi$.

1.15.- Distancias entre puntos, rectas y planos.

Planos paralelos y perpendiculares; dos planos son $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ $\boldsymbol{y}$ $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$
Son paralelos si los coeficientes de x,y,z en sus ecuaciones son proporcionales, es decir, si se verifica $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$.
Dos planos $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ y $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ son perpendiculares cuando se verifica la relación de $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$. La forma normal de la ecuación de un plano es: $xcos\alpha+ycos\beta+zcos\theta-p=0$.
Siendo p la distancia del origen al plano, α,β,θ, los ángulos de la dirección de la perpendicular al plano por el origen. La forma normal de la ecuación del plano $Ax+By+Cz+D=0$ es $|d|=\frac{Ax+By+Cz+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ en donde el signo del radical se considera opuesto al de D para que la distancia p sea siempre positiva.

Ej # 27

Estudiar la ecuación $2x+3y+6z=12\rightarrow 2x+3y+6z-12$
Sol:
Como la ecuación es lineal o de primer grado, representa un plano. $P(x,y,z)$

$$cos\alpha=\frac{2}{7},cos\beta=\frac{3}{7}\ y\ cos\theta=\frac{6}{7}$$

La triada $P(x,y,z)=(0,0,0)$ es el punto de partida o del origen al plano.

$$|d|=\left|\frac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|\rightarrow\left|\frac{2(0)+3(0)+6(0)-12}{7}\right|\rightarrow\frac{12}{7}u$$

Ej # 28

Hallar la distancia del punto $(-2{,}2{,}3)$ al plano de la ecuación $8x - 4y - z - 8 = 0$
Sol:

$$|d| = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right| \rightarrow \left|\frac{8(-2) - 4(2) - 1(3) - 8}{3}\right| \rightarrow \frac{35}{9}u$$

1.16.- La Esfera y Cilindros. Ecuaciones y gráficas.

Si en la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ si se verifica que $a = b = c$, se transforma en $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, que representa una esfera de centro $(0{,}0{,}0)$ y de radio **a.** en el caso de que el centro de la esfera fuera de centro (h, j, k) en lugar del origen, su ecuación sería: $(x - h)^2 + (y - j)^2 + (z - k)^2 = a^2$

Ej # 29

Hallar la ecuación de la esfera con centro en el punto $(-2{,}1 - 3)$ y de radio 4
Sol:
Usando la ecuación sería: $(x - h)^2 + (y - j)^2 + (z - k)^2 = a^2$
$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 3)^2 = (4)^2$
Desarrollando el binomio y ordenando se llega a la siguiente ecuación
$\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 6z - 2 = 0}$

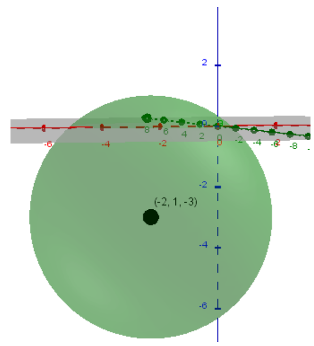


Figura 19

Elipsoide: si a, b, c son distintos, la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
Representan el caso más general de una cuadrática. Si $a \neq b$, pero $b = c$, el elipsoide es de revolución. Si el centro del elipsoide es el punto (h, j, k) y sus ejes son paralelos a las dos coordenadas, la ecuación adquiere la forma $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} + \frac{(z-j)^2}{c^2} = 1$
Si el centro es en el origen, la ecuación es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Ej # 30

Demostrar que la ecuación siguiente es un elipsoide. Hallar su centro y las longitudes de sus semiejes de: $2x^2 + 3y^2 + z^2 - 8x + 6y - 4z - 3 = 0$

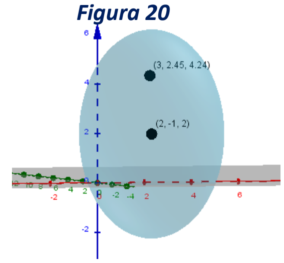
Sol: para resolver el ejercicio es necesario ordenar y hace la competición de cuadrados $\boldsymbol{\left(\frac{b}{2a}\right)^2}$
$2x^2 - 8x + 3y^2 + 6y + z^2 - 4z = 3$; es recomendable sacar factor común para que el ejercicio de vuelva más fácil.
$2(x^2 - 4x) + 3(y^2 + y) + z^2 - 4z = 3$

$$2\left(x^2 - 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 + 3\left(y^2 + 2y + \left(\frac{2}{2}\right)^2\right) + z^2 - 4z + \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 3 + \left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{2}\right)^2 + \left(\frac{4}{2}\right)^2\right.$$

$2(x^2 - 4x + 4) + 3(y^2 + 2y + 1) + z^2 - 4z + 4 = 3 + 2 * 4 + 3 + 4$
$2(x^2 - 4x + 4) + 3(y^2 + 2y + 1) + z^2 - 4z + 4 = 18$; Factorizando y convirtiendo el radio en 1

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{6} + \frac{(z-2)^2}{18} = 1$$

El centro del elipsoide es la triada $(\mathbf{2}, \mathbf{-1}, \mathbf{2})$
Sus semiejes son las raíces de los divisores:
$(\mathbf{3}, \sqrt{\mathbf{6}}, \mathbf{3}\sqrt{\mathbf{2}})$

Figura 20


1.17.- Superficies Cuádricas. Ecuaciones y gráficas.

Los conos, esferas, cilindros circulares y parabólico, y los elipsoides de revolución son superficies dadas por gráficas de ecuaciones de segundo grado en x, y y z. La gráfica de una ecuación de segundo grado en tres variables es una superficie cuadrática. Expresado de la forma: $\boldsymbol{Ax^2 + By^2 + cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0}$.

Aunque son seis las superficies cuadráticas, es importante mencionar una superficie especial: la esfera. La esfera es una figura geométrica bastante conocida y común. Hasta los planetas son muy similares a esferas. Matemáticamente, las esferas poseen una representación algebraica como la siguiente:

$\boldsymbol{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2}$.

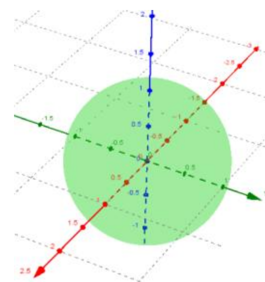


Figura 21

La anterior es una ecuación reducida para una esfera de radio $\boldsymbol{r}$ y con centro en el punto $\boldsymbol{C(a, b, c)}$. Parece mucho a una circunferencia en un plano de dos dimensiones. De hecho, la abstracción al espacio tridimensional es inmediata. La definición forma de una esfera es un conjunto de todos los puntos $\boldsymbol{(x, y, z)}$ que son equidistantes a un punto fijo llamado centro.

Los puntos que están en los tres ejes coordenados en el espacio son:

$\boldsymbol{x^2 + y^2 = 0}$ implica que $\boldsymbol{x = y = 0}$ (el eje $\boldsymbol{z}$);
$\boldsymbol{y^2 + z^2 = 0}$ implica que $\boldsymbol{y = z = 0}$ (el eje x);
$\boldsymbol{x^2 + z^2 = 0}$ implica que $\boldsymbol{x = z = 0}$ (el eje y).

Ahora, habiendo explicado la anterior superficie, continúan las 6 superficies cuadráticas (oficialmente hablando). Dichas formas espaciales son: el elipsoide, el hiperboloide de una hoja, el hiperboloide de dos hojas, el cono elíptico, el paraboloide y el paraboloide hiperbólico.

Elipsoide: El elipsoide es una superficie cuadrática fácil de identificar. Las características de su forma algebraica es que las tres variables $\boldsymbol{x, y, y\ z}$ están elevadas al cuadrado y todas son positivas. Además, en su forma más simple, están igualadas a 1. La ecuación reducida de un elipsoide es:

$$\boldsymbol{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1}$$

Se puede observar que las tres variables son positivas y todo está igualado a 1. Las constantes a, b y c representan la máxima extensión del elipsoide en los ejes x, y y z respectivamente. El centro del elipsoide es $C(x_o, y_o, z_o)$. Lo anterior cobra significado al graficar un elipsoide en el espacio:

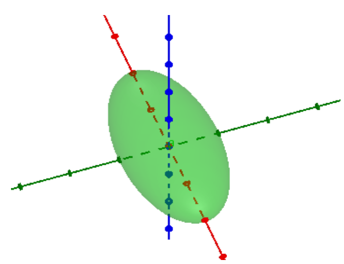


Figura 22

Ej # 31

Describa el bosquejo del siguiente ejercicio

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + z^2 = 1$$

Es necesario que recordemos las definiciones anteriores

$\boldsymbol{x^2 + y^2 = 0}$ implica que $\boldsymbol{x = y = 0}$ (el eje $\boldsymbol{z}$);
$\boldsymbol{y^2 + z^2 = 0}$ implica que $\boldsymbol{y = z = 0}$ (el eje x);
$\boldsymbol{x^2 + z^2 = 0}$ implica que $\boldsymbol{x = z = 0}$ (el eje y).

O también se puede afirmar que:

xy Cuando $z = 0$ entonces queda $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$, de donde se sacan los valores de $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, igualando a cero cada una de las variables; sea $x = 0 \rightarrow \frac{y^2}{16} = 1 \therefore y = \pm 4; y = 0 \rightarrow \frac{x^2}{4} = 1 \therefore x = \pm 2$.

xz Cuando $y = 0$ entonces queda $\frac{x^2}{4} + z^2 = 1$, de donde se sacan los valores de $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{z}$, igualando a cero cada una de las variables; sea $x = 0 \rightarrow z^2 = 1 \therefore z = \pm 1; z = 0 \rightarrow \frac{x^2}{4} = 1 \therefore x = \pm 2$.

yz Cuando $x = 0$ entonces queda $\frac{y^2}{16} + z^2 = 1$, de donde se sacan los valores de $\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{z}$, igualando a cero cada una de las variables; sea $y = 0 \rightarrow z^2 = 1 \therefore z = \pm 1; z = 0 \rightarrow \frac{x^2}{16} = 1 \therefore y = \pm 4$.

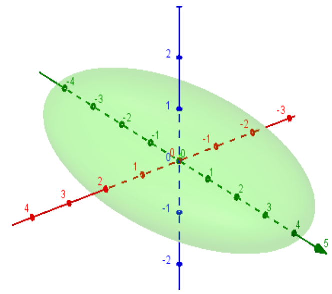


Figura 23

Hiperboloide de una hoja

El hiperboloide de una hoja es una forma que parece familiar al verla pero que en realidad no es tan común en la naturaleza visible. El hiperboloide se puede entender como la revolución de una hipérbola sobre el eje que por el que no pasan los vértices, adquiriendo así volumen.

La ecuación de un hiperboloide se identifica porque, en primer lugar, todas las variables están igualadas a 1. Sin embargo, una de ellas es negativa. De hecho, la variable que es negativa será la que indique hacia que eje abre el hiperboloide. La ecuación, pues, de un hiperboloide de una hoja es:

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1}$$

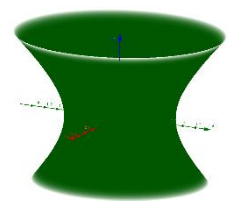


Figura 24

Las constantes $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ designan la extensión en los ejes de cada variable. En el caso anterior, el hiperboloide tiene su centro en el origen, sin embargo esto puede cambiar si se suman o restan valores a las variables lineales y el resultado se eleva al cuadrado.

Ej # 32

Graficar un hiperboloide de una hoja:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1$$

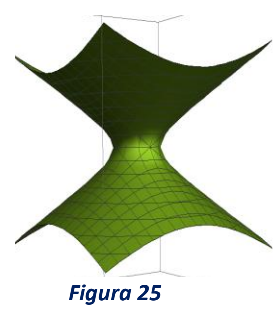


Figura 25

xy Cuando $z = 0$ entonces queda $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$, de donde se sacan los valores de $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, igualando a cero cada una de las variables; sea $x = 0 \rightarrow \frac{y^2}{4} = 1 \therefore y = \pm 2; y = 0 \rightarrow \frac{x^2}{4} = 1 \therefore x = \pm 2$.

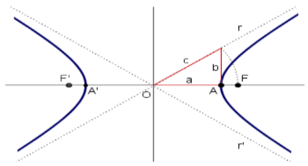
De donde surge una elipse

xz Cuando $y = 0$ entonces queda $\frac{x^2}{4} - z^2 = 1$, de donde se sacan los valores de $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{z}$, igualando a cero cada una de las variables; sea $x = 0; -z^2 = 1 \therefore z = \sqrt{-1}$;.entonces se recurre a trazar asíntotas o se recurre a la fórmula de la hipérbola; sí $z = 0 \rightarrow \frac{x^2}{4} = 1 \therefore x = \pm 2$

yz Cuando $x = 0$ entonces queda $\frac{y^2}{4} - z^2 = 1$, de donde se sacan los valores de $\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{z}$, igualando a cero cada una de las variables; sea $y = 0 \rightarrow -z^2 = 1 \therefore z = \sqrt{-1}$;. entonces se recurre a trazar asíntotas o se recurre a la fórmula de la hipérbola; sí $z = 0 \rightarrow \frac{x^2}{4} = 1 \therefore y = \pm 2$

Hiperboloide de dos hojas

El hiperboloide de dos hojas es la revolución de una hipérbola sobre el eje por el que sí pasan los vértices. El resultado es una figura segmentada. Por ejemplo, una hipérbola horizontal con centro en el origen.



Al rotarse respecto al eje $\boldsymbol{y}$ se obtiene un hiperboloide de una hoja. Pero al rotarse respecto al eje $\boldsymbol{x}$, el resultado es un hiperboloide de dos hojas.

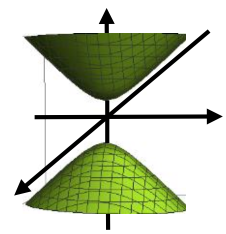


Figura 26

La ecuación algebraica de esta superficie cuadrática es igual a la anterior, pero en este caso son dos de las variables las que son negativas. Para identificar el eje hacia donde abre este hiperboloide hay que ubicar la variable que es positiva, aquella que se diferencia de las demás. Todo está igualado a $\mathbf{1}$.

Su ecuación es $\frac{\boldsymbol{z^2}}{\boldsymbol{c^2}} - \frac{\boldsymbol{y^2}}{\boldsymbol{b^2}} - \frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{a^2}} = \mathbf{1}$

Ej # 33

Graficar la hiperboloide de dos hojas:

$$-\frac{\boldsymbol{x^2}}{\mathbf{4}} + \frac{\boldsymbol{y^2}}{\mathbf{4}} - \boldsymbol{z^2} = \mathbf{1}$$

xy Cuando $z = 0$ entonces queda $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$, de donde se sacan los valores de $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, igualando a cero cada una de las variables; sea $x = 0 \rightarrow \frac{y^2}{4} = 1 \therefore y = \pm 2; y = 0; -\frac{x^2}{4} = 1$. Se recurre a trazar asíntotas o se recurre a la fórmula de la hipérbola

xz Cuando $y = 0$ entonces queda $-\frac{x^2}{4} - z^2 = 1$, de donde se sacan los valores de $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{z}$, como no se puede igualando a cero cada una de las variables; entonces se recurre a trazar asíntotas o se recurre a la fórmula de la hipérbola.

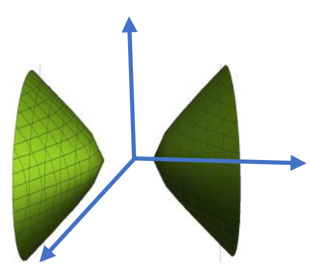


Figura 27

yz Cuando $x = 0$ entonces queda $\frac{y^2}{4} - z^2 = 1$, de donde se sacan los valores de $\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{z}$, igualando a cero cada una de las variables; sea $y = 0 \rightarrow -z^2 = 1 \therefore z = \sqrt{-1}$;. entonces se recurre a trazar asíntotas o se recurre a la fórmula de la hipérbola; sí $z = 0$

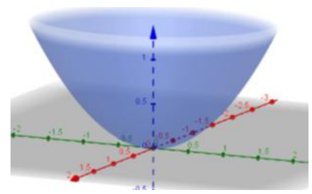
$$\rightarrow \frac{x^2}{4} = 1 \therefore y = \pm 2$$

Paraboloide

El paraboloide es una forma más o menos común. No tanto en la naturaleza, pero si coincide con las antenas parabólicas de transmisión de señales que se usan en todo el mundo. El paraboloide resulta de rotar una parábola en dos dimensiones sobre un eje.

La ecuación de paraboloide es similar a la del cono. Pero tiene otra peculiaridad. Todo está igualado a $\mathbf{0}$. Una variable es negativa, sin embargo, esa misma variable es lineal, es decir, no está elevada al cuadrado. Su fórmula es :

Figura 28



$$\frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{a^2}}+\frac{\boldsymbol{y^2}}{\boldsymbol{b^2}}=\frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{c}}$$

La variable $\boldsymbol{z}$ es negativa pero pasa al otro lado de la ecuación con el signo contrario. Además de ser negativa, es lineal. Otro detalle importante es que el denominador que pudiera presentarse dividiendo a $\boldsymbol{z}$ es lineal también. El paraboloide no tiene centro pero si vértice y se obtiene igual. En este caso es un paraboloide con centro en el origen.

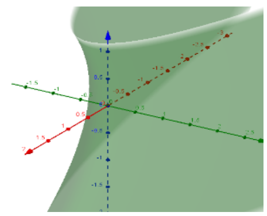


Figura 29

Ej # 34

Graficar el paraboloide

$$\boldsymbol{x+y^2-\frac{z^2}{4}=0}$$

xy Cuando $z=0$ entonces queda $x+y^2=0$, de donde se sacan los valores de $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, igualando a cero cada una de las variables; pero no se encuentra un valor numérico, debido a que está igualado a cero, entonteces se recurre a trazar asíntotas o se recurre a la fórmula de la hipérbola

xz Cuando $y=0$ entonces queda $x-\frac{z^2}{4}=0$, de donde se sacan los valores de $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{z}$, igualando a cero cada una de las variables; pero no se encuentra un valor numérico, debido a que está igualado a cero, entonteces se recurre a trazar asíntotas o se recurre a la fórmula de la hipérbola.

yz Cuando $x=0$ entonces queda $y^2-z^2=0$, de donde se sacan los valores de $\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{z}$, igualando a cero cada una de las variables; pero no se encuentra un valor numérico, debido a que está igualado a cero, entonteces se recurre a trazar asíntotas o se recurre a la fórmula de la hipérbola.

Paraboloide hiperbólico

El paraboloide hiperbólico es sin duda la superficie cuadrática más compleja y así mismo, más difícil de graficar. Se considera que tiene la forma de una silla de montar.

La ecuación algebraica tiene varios distintivos. Primero, todos los elementos está igualados a $\mathbf{0}$. Existe una variable lineal. Esta variable indica hacia que eje apunta el "asiento" de la silla. Esta variable puede ser negativa o positiva, y de ello depende que la silla apunte hacia el eje positivo o al negativo, respectivamente. La siguiente peculiaridad es que alguna de las variables cuadráticas es negativa. Dicha variable indica hacia donde apunta el costado de la "silla".

Su fórmula es:

$$\frac{\boldsymbol{y^2}}{\boldsymbol{b^2}}-\frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{a^2}}=\frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{c}}$$

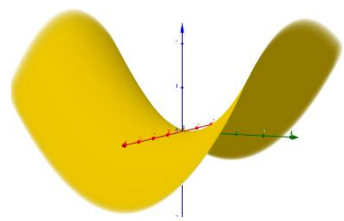


Figura 30

Ej # 35

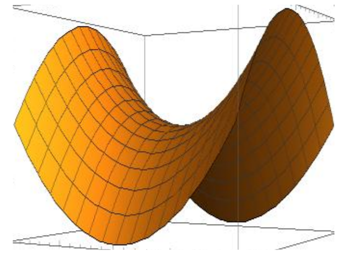


Figura 31

Graficar el paraboloide hiperbólico
$\boldsymbol{x^2 - y^2 = z}$
xy Cuando $z = 0$ entonces queda $x^2 - y^2 = 0$, de donde se sacan los valores de $\boldsymbol{x}$ *e* $\boldsymbol{y}$, igualando a cero cada una de las variables; resulta que $\boldsymbol{x^2 = y^2} \therefore \boldsymbol{x = \pm y}$, convirtiéndose en dos líneas rectas que pasas por el origen. Dividiendo el plano en cuatro partes.

xz Cuando $y = 0$ entonces queda $x^2 = z$, de donde se sacan los valores de $\boldsymbol{x}$ *e* $\boldsymbol{z}$, igualando a cero cada una de las variables; resulta que $\boldsymbol{x} = \sqrt{\boldsymbol{z}} \therefore \boldsymbol{x} = \pm \boldsymbol{z}$, convirtiéndose en una hipérbole.
yz Cuando $x = 0$ entonces queda $-y^2 = z$, de donde se sacan los valores de $\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{z}$, despejando se obtiene $y^2 + z = 0$; igualando a cero cada una de las variables; pero no se encuentra un valor numérico, debido a que está igualado a cero y trasladando una de las variables se convierte en algo indeterminado, entonteces se recurre a trazar asíntotas o se recurre a la fórmula de la hipérbola.

Ejercicios
Dibuje la gráfica de la ecuación e identifique la superficie

- **a)** $4x^2 + 9y^2 + z^2 = 36$
- **b)** $4x^2 + 9y^2 - z^2 = 36$
- **c)** $x^2 = y^2 - z^2$
- **d)** $\frac{x^2}{36} + \frac{z^2}{25} = 4y$
- **e)** $\frac{x^2}{36} - \frac{z^2}{25} = 9y$
- **f)** $\frac{y^2}{25} + \frac{x}{49} = 4z$

Unidad II: Límite y continuidad de funciones de una y varias variables

2.1.- Entorno de un punto. Entorno como valor absoluto.

Valor absoluto Se define el valor absoluto de un número real como el número dado, si éste es positivo, o su opuesto en caso de ser estrictamente negativo. Es decir:

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Ej # 36

$|13| = 13$. Aplicando la definición a $|13|$ sería $x = 13$. Como es mayor o igual que cero, la definición nos dice que $|x| = x = 13$.
$|0| = 0$. De igual forma, $x = 0$. Al ser $x \geq 0$, se tiene que $|x| = x = 0$.
$|-19| = 19$, porque $x = -19 < 0$, por lo que, según la definición se tendrá: |x| = – x
$\Rightarrow |-19| = -(-19) = 19$.

Propiedades:

1. $|x| \geq 0$
2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3. $|x| = |-x|$
4. $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ ó $x = -y$
5. $|x| = y \Leftrightarrow x = y$ ó $x = -y$ $(debe\ ser\ y \geq 0)$
6. $d(x,y) = |x - y| = |y - x|$ lo que quiere decir que la distancia que separa a x de y es igual que la diferencia de ambos números, tomada en valor absoluto.
7. $|x * y| = |x| * |y|$
8. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, siempre que $y \neq 0$.
9. $|x| \leq y$ (siendo $y \geq 0$) $\Leftrightarrow - y \leq x \leq y$ Las dos desigualdades $- y \leq x, x \leq y$, se verifican simultáneamente. La propiedad es cierta, también, si las desigualdades son estrictas ($<$ en lugar de $\leq$).
10.) $|x| \geq y$ (siendo $y \geq 0$) $\Leftrightarrow$ $x \geq y$ ó $x \leq - y$ Análoga, si las desigualdades son estrictas.
11. $|x| = |y| \Leftrightarrow x^2 = y^2$
12.) $|x|^2 = x^2$
13. $\sqrt{x} = |x|$
14. Desigualdad triangular: $|x + y| \leq |x| + |y|$.
15. $|x - y| \geq |x| - |y|$
16. $|x| \leq |y| \Leftrightarrow x^2 \leq y^2$. Análoga si las desigualdades son estrictas.

Entornos Se define el entorno de centro a y radio $r > 0$, y se utiliza la notación: $\boldsymbol{E(a,r)}$, como el conjunto de todos los números x que están a una distancia de a inferior a r. Es decir:
$E(a,r) = \{x \epsilon R \ / d(x,a) < r\}$

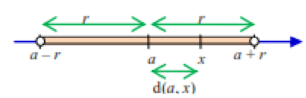


Figura 32

Según el gráfico, *x* puede estar en cualquier lugar del intervalo coloreado. Por tanto, dicha zona es el entorno de centro $\boldsymbol{a}$ y radio $\boldsymbol{r}$.

Por las propiedades 6 de valor absoluto se tiene que: $d(x,a) < r \Leftrightarrow |x - a| < r$. Por tanto, una definición equivalente de *entorno* es: $E(a,r) = \{x \epsilon R \ / |x - a| < r\}$

Pero la propiedad 9 de valor absoluto nos lleva a que: $|x - a| < r \Leftrightarrow - r < x - a < r$
Si sumamos $\boldsymbol{a}$ en las tres posiciones de estas desigualdades, la expresión resulta ser equivalente a: $a - r < x < a + r$.

Por tanto, una tercera definición equivalente es:
$E(a,r) = \{x \in R \ / a - r < x < a + r\} = (a - r, a + r)$
Es decir, hemos encontrado que el entorno de centro a y radio r es lo mismo que el intervalo abierto $(a - r, a + r)$.

Se define el ***entorno reducido de centro a y radio r*** como $E(a,r)$ excluido el centro a. La notación que se emplea es $E * (a,r)$. Es decir: $E * (a,r) = E(a,r) - \{a\}$
Podríamos expresarlo como unión de dos intervalos abiertos:
$E * (a,r) = (a - r, a) \cup (a, a + r)$.

Ej # 37
Resolver $\boldsymbol{|3x - 1| = 2}$
Sol:
Es recomendable recordar l propiedades anteriores.

$$\begin{cases} 3x - 1 = 2 \Leftrightarrow 3x = 2 + 1 \rightarrow 3x = 3 \therefore x = 1 \\ 3x - 1 = -2 \Leftrightarrow 3x = -2 + 1 \rightarrow 3x = -1 \therefore x = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Las dos soluciones posibles son $x = 1 \wedge x = -\frac{1}{3}$.

Ej # 38
Resolver $|\mathbf{2}|\boldsymbol{x} - \mathbf{3}| - \mathbf{4}\boldsymbol{x}| = \mathbf{4}$

Sol:

Para resolver este ejercicio es necesario que se tenga muy presente las reglas o propiedades de los logaritmos.

A como se puede observar el ejercicio está un poco difícil, lo que en matemática se le llamaría **dificultad alta**, entonces primeramente se trabaja el valor absoluto interno, multiplicar el factor común del primer término y surgen dos soluciones.

$\boldsymbol{\big||2x - 6| - 4x\big| = 4}$

$\boldsymbol{|2x - 6 - 4x| = 4}$ | $\boldsymbol{|-2x + 6 - 4x| = 4}$

$\boldsymbol{|-2x - 6| = 4\ E_1}$ | $\boldsymbol{|-6x + 6| = 4\ E_2}$

Cada una de las soluciones se convierte en dos nuevas soluciones por definición de las propiedades de los logaritmos.

$\boldsymbol{|-2x - 6| = 4\ E_1}$

$$\begin{cases} -2x - 6 = 4 \rightarrow -2x = 10 \therefore x = -5 \\ -2x - 6 = -4 \rightarrow -2x = 2 \ \therefore x = -1 \end{cases}$$

$\boldsymbol{|-6x + 6| = 4\ E_2}$

$$\begin{cases} -6x + 6 = 4 \rightarrow -6x = -2 \therefore x = \dfrac{1}{3} \\ -6x + 6 = -4 \rightarrow -6x = -10 \ \therefore x = \dfrac{5}{3} \end{cases}$$

Al comprobar la validez de las distintas soluciones, obtenemos que $x = -1$ no, nos sirve. Por tanto, las soluciones son: $\boldsymbol{-5, \frac{1}{3}}$ ó $\boldsymbol{\frac{5}{3}}$.

Ej # 39
Expresar en forma de intervalo $\boldsymbol{E(1, 2)}$

Sol:
$\boldsymbol{E(1, 2) = (1 - 2, 1 + 2) = (-1, 3)}$

Ejercicios:

Resolver los siguientes ejercicios

a) $|3x-2| = |x+6|$
b) $|3x^2-2x-3| = 0$
c) $|x-2| = |x+3|$
d) Expresar en forma de intervalo y de entorno el conjunto $\{x \in R \ / \ |x+2| < 3\}$
e) Expresar en forma de intervalo $\boldsymbol{E(2, 7.2)}$

2.2.- Límite Finito según Cauchy para funciones reales de una variable real.

El concepto de límite ha sido de enorme utilidad en el desarrollo de las matemáticas; en él se fundamenta el cálculo infinitesimal. Aunque muchos matemáticos utilizaron la idea intuitiva de límite, fue el barón de Cauchy (1789-1857), a principios del siglo XIX, quien dio una definición satisfactoria de límite y, en consecuencia, de derivada de una función. En el primer apartado, se ha definido el concepto de límite de una sucesión que recordamos de nuevo: **Definición:** una sucesión $(a_n)_{n \in N}$ es convergente si existe un número real $L \in R$ tal $\boldsymbol{\forall \varepsilon >= 0,\ \exists N \in N\ t.q\ \forall n > N \implies |a_n - L| < \varepsilon.}$ En este caso, se denota $\boldsymbol{L = \lim_{n\to\infty} a_n}$ y se denomina límite de la sucesión. También se puede ver $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L$

(El límite de una sucesión convergente es único). Sea $(S_n)_{n\in N}$ una sucesión convergente y sean $a\ b\ \in R$ tales $a = \lim_{n\to\infty} S_n$, $b = \lim_{n\to\infty} S_n$. Entonces $\boldsymbol{a = b}$.

Ej # 40

Verificar si la siguiente sucesión es convergente o divergente

$$\boldsymbol{a_n = \frac{2n+1}{n+3}}$$

Sol:

Sustituir los valores de n con los valores que se deseen

$$\boldsymbol{a_1 = \frac{2*1+1}{1+3} = \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4} \cong 0.75}$$

$$\boldsymbol{a_2 = \frac{2*2+1}{2+3} = \frac{4+1}{5} = \frac{5}{5} \cong 1}$$

$$\boldsymbol{a_3 = \frac{2*3+1}{3+3} = \frac{6+1}{6} = \frac{7}{6} \cong 1.166}$$

.
.
.

$$\boldsymbol{a_{100} = \frac{2*100+1}{100+3} = \frac{200+1}{103} = \frac{201}{103} \cong 1.951}$$

$$\boldsymbol{a_{2000} = \frac{2*2000+1}{2000+3} = \frac{4000+1}{2003} = \frac{4001}{2003} \cong 1.9975}$$

La sucesión tiende a $\boldsymbol{2}$ converge

$$a_n = \frac{2n+1}{n+3} = 2$$

Ej # 41
Verificar si la siguiente sucesión es convergente o divergente.
$a_n = 2n + 5$

Sol:
Sustituir los valores de n con los valores que se deseen

$a_1 = 2 * 1 + 5 = 2 + 5 = 7$

$a_2 = 2 * 2 + 5 = 4 + 5 = 9$

$a_3 = 2 * 3 + 5 = 6 + 5 = 11$

.
.
.

$a_{100} = 2 * 100 + 5 = 200 + 5 = 205$

$a_{2000} = 2 * 2000 + 5 = 4000 + 5 = 4005$

La sucesión tiende a ∞ por tanto la sucesión es divergente.

Ej # 42
Verificar si la sucesión es divergente ó convergente mediante el uso de límite $a_n = 2n + 6$

Sol: Usando $\lim_{n\to\infty} a_n$

$\lim_{n\to\infty} 2n + 6$

Usando las propiedades de los límites, pero también podemos hacer la sustitución directa

$\lim_{n\to\infty} 2n + 6 = 2(\infty) + 6 = \infty + 6 \therefore \lim_{n\to\infty} 2n + 6 = \infty$, se concluye diciendo que la serie es divergente.

Ejercicios

Verificar si la sucesión es divergente ó convergente mediante el uso de límite

$a_n = -3n^2 + 6n$ $\qquad a_n = \dfrac{n^4 + n^2 + 1}{-6n^3 + 5}$ $\qquad a_n = \left(\dfrac{4n+1}{2n}\right)^{\frac{7n+6}{n}}$

2.3.- Interpretación geométrica del Límite.

En matemáticas, se usa el concepto del límite para describir la tendencia de una sucesión o una función. La idea es que una sucesión o una función tienen un límite si progresivamente alcanza un número, que se llama el límite.

El límite de una función es un concepto fundamental del cálculo diferencial matemático Informalmente, el hecho que una función

Sea f una función definida en cada número de algún intervalo abierto que contiene a $\boldsymbol{a}$, excepto posiblemente en el número $\boldsymbol{a}$ mismo. El límite de $f(x)$ conforme a $\boldsymbol{a}$ es $\boldsymbol{L}$**,** lo que se escribe como:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

Si la siguiente proposición es verdadera:

Dada cualquier $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$, no importa cuán pequeña sea, existe una $\boldsymbol{\delta > 0}$ tal que

Si $\boldsymbol{0 < |x - a| < \delta}$ entonces $\boldsymbol{|f(x) - L| < \epsilon}$

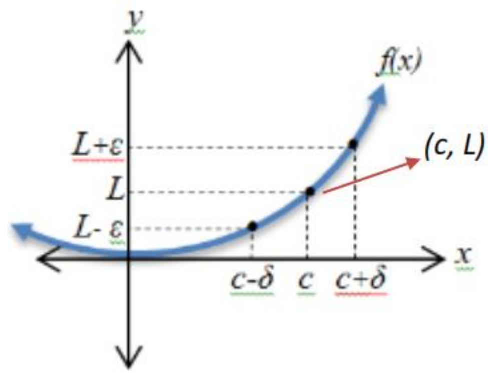


Figura 33

Ej # 43

Utilice la definición de límite para demostrar que

$\lim\limits_{x\to 2}(4x - 5) = 3$

Sol:

Si $\boldsymbol{0 < |x - 2| < \delta}$ entonces $\boldsymbol{|(4x - 5) - 3| < \epsilon}$
Si $\boldsymbol{0 < |x - 2| < \delta}$ entonces $\boldsymbol{|(4x - 8| < \epsilon}$
Si $\boldsymbol{0 < |x - 2| < \delta}$ entonces $4\boldsymbol{|(x - 2| < \epsilon}$
Si $\boldsymbol{0 < |x - 2| < \delta}$ entonces $\boldsymbol{|(x - 2| < \frac{\epsilon}{4}}$

Esto denota que $\boldsymbol{\frac{1}{4}\epsilon}$ es una $\boldsymbol{\delta}$ satisfactoria. Con esta elección de $\boldsymbol{\delta}$ se tiene el argumento siguiente:

$\boldsymbol{0 < |x - 2| < \delta}$
$\boldsymbol{4|x - 2| < 4\delta}$
$\boldsymbol{|(4x - 8)| < 4\delta}$
$\boldsymbol{\Rightarrow |(4x - 5) - 3| < 4\delta}$
$\boldsymbol{|(4x - 5) - 3| < \epsilon}$ Esto se debe porque $\boldsymbol{\frac{1}{4}\epsilon}$

Por tanto, se ha establecido que $\boldsymbol{\delta = \frac{1}{4}\epsilon}$, entonces se cumple la proposición, esto demuestra que

$\lim\limits_{x\to 2}(4x - 5) = 3$

MÉTODO NUMÉRICO Este método permite estimar el límite de una función al evaluar el comportamiento de la misma en varios puntos cercanos a $x = c$, en dos conjuntos de valores de x, uno que se acerque por su izquierda y otro que se acerque por su derecha para estimar el límite.

Ej # 44

Evalúa la función $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 5}}$ en varios puntos cercanos a $\boldsymbol{x = 5}$ y utilizar los resultados para estimar el límite.

$\boldsymbol{x}$	4.9	4.99	4.999	5	5.001	5.01	5.1
$\boldsymbol{f(x)}$	2.9	2.99	2.999	¿ ?	3.001	3.01	3.5

En la tabla de valores se observa que cuando $x = 5$, se acerca a 3 tanto por la izquierda y por la derecha. Entonces se dice que el límite

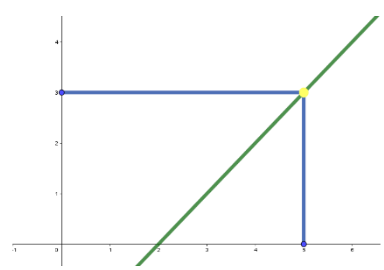


Figura 34

de $f(x)$ cuando x tiende a 5 es 3. En la notación, $\lim_{x\to 5} \boldsymbol{f(x)} = \mathbf{3} \rightarrow \lim_{x\to 5} \frac{x^2-7x+10}{x-5} = \mathbf{3}$

2.4.- Cálculo de Límites usando propiedades.

Propiedades de los Límites

1. $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

Ej # 45

$\lim_{x\to 2} x^2 + 1$

Sol:

Sustituyendo, los valores de x, en la función.

$\lim_{x\to 2} x^2 + 1 = (2)^2 + 1 = 4 + 1 \rightarrow \lim_{x\to 2} x^2 + 1 = \mathbf{5}$

2. $\lim_{x\to c} b = b$

Ej # 46

$\lim_{x\to 2} 1$

Sol:

Solo se escribe la misma cantidad, debido a que no se sustituye el valor de la variable debido a que no hay en la función.

3. $\lim_{x\to c} x = c$

Ej # 47

$\lim_{x\to 2} x = 2$

4. $\lim_{x\to c} x^n = c^n$

Ej # 48

$\lim_{x\to 3} x^2$

Sol:

$\lim_{x\to 3} x^2 = (3)^2 \therefore \lim_{x\to 3} x^2 = 9$

5. $\lim_{x\to c} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) \pm \lim_{x\to c} g(x)$

Ej # 49

$\lim_{x\to 3} (x^2 + 4x)$

Sol:

Aplicando límite a cada uno de los términos

$\lim_{x\to 3} x^2 + \lim_{x\to 3} 4x = (3)^2 + (4 * 3) = 9 + 12 \therefore \lim_{x\to 3} (x^2 + 4x) = \mathbf{21}$

6. $\lim_{x\to c} [f(x) * g(x)] = [\lim_{x\to c} f(x)] * [\lim_{x\to c} g(x)]$

Ej # 50

$\lim_{x \to 7} x(x^2+1)$
Sol:
$\lim_{x \to 7} x(x^2+1) = \lim_{x \to 7} x * \lim_{x \to 7}(x^2+1) = 7 * ((7)^2+1) = 7 * (49+1) = 7 * 50$
$\therefore \lim_{x \to 7} x(x^2+1) = \mathbf{350}$

7. $\lim_{x \to c}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)}$

Ej # 51

$\lim_{x \to 4}\left(\frac{x}{-7x+1}\right)$
Sol:
$\frac{\lim_{x \to 4} x}{\lim_{x \to 4}(-7x+1)} = \frac{4}{-7*4+1} = \frac{4}{-28+1} = 4 = \frac{4}{-27} \therefore \lim_{x \to 4}\left(\frac{x}{-7x+1}\right) = -\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{27}}$

8. $\lim_{x \to c}[f(x)]^n = [\lim_{x \to c} f(x)]^n$

Ej # 52

$\lim_{x \to -2}(5x+7)^4$

Sol:
$[\lim_{x \to -2}(5x+7)]^4 = [5(-2)+7]^2 = (-10+7)^2 = (-3)^2 \therefore \lim_{x \to -2}(5x+7)^4 = \mathbf{9}$

9. $\lim_{x \to c}[b(f(x))] = b[\lim_{x \to c} f(x)]$

Ej # 53

$\lim_{x \to 5}[3(3x-4x^2)]$
Sol:
$\lim_{x \to 5}[3(3x-4x^2)] = 3\lim_{x \to 5}(3x-4x^2)$ Sustituyendo lo valores de la variable x
$3\lim_{x \to 5}(3x-4x^2) = 3(3*5-4(5)^2) = 3(15-4*25) \to 3(15-100) = 3*(-85)$
$\therefore \lim_{x \to 5}[3(3x-4x^2)] = \mathbf{-285}$

10. $\lim_{x \to c}\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x}$

Ej # 53

$\lim_{x \to 4}\sqrt[3]{\frac{x}{-7x+1}}$
Sol:
Aplicando límite dentro del radical queda:
$\sqrt[3]{\frac{\lim_{x \to 4} 4}{\lim_{x \to 4}(-7x+1)}} = \sqrt[3]{\frac{4}{(-7*4)+1}} = \sqrt[3]{\frac{4}{-28+1}} = \sqrt[3]{\frac{4}{-27}}$
$\therefore \lim_{x \to 4}\sqrt[3]{\frac{x}{-7x+1}} =$
$-\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$

11. $\lim_{x\to c}\log f(x) = log\lim_{x\to x} f(x)$

Ej # 54

$\lim_{x\to 5}\log(3x-7)$

Sol:

$log(\lim_{x\to 5}(3x-7)) = \log(3*5-7) \to \log(15-7) = log8 \therefore \lim_{x\to 5}\log(3x-7) = \mathbf{0.903}$

Ej # 55

Calcular el límite de $\lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

Sol:

Por sustitución queda de la siguiente forma:

$$\lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49} = \frac{2-\sqrt{7-3}}{(7)^2-49} = \frac{2-\sqrt{4}}{49-49} = \frac{2-2}{0} = \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$$

Recurriendo a los artificios matemáticos se racionaliza el numerador:

$$\lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49} * \frac{2+\sqrt{x-3}}{2+\sqrt{x-3}}$$

Usando $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$$\lim_{x\to 7}\frac{\left(2-\sqrt{x-3}\right)*\left(2+\sqrt{x-3}\right)}{(x^2-49)*\left(2+\sqrt{x-3}\right)} = \lim_{x\to 7}\frac{2^2-\left(\sqrt{x-3}\right)^2}{(x^2-49)*\left(2+\sqrt{x-3}\right)}$$

$$\to \lim_{x\to 7}\frac{4-(x-3)}{(x^2-49)*(2+\sqrt{x-3})} = \lim_{x\to 7}\frac{4-x+3}{(x^2-49)*(2+\sqrt{x-3})}$$

$$= \lim_{x\to 7}\frac{7-x}{(x^2-49)*(2+\sqrt{x-3})}$$

Haciendo la sustitución del valor de la variable x

$$\lim_{x\to 7}\frac{7-x}{(x^2-49)*(2+\sqrt{x-3})} = \frac{7-7}{((7)^2-49)(2+\sqrt{7-3})} = \frac{0}{0*(2+\sqrt{4})} = \frac{0}{0*4} \to \frac{0}{0}\ ind$$

¿Qué más se podría hacer?

Factorizar $\left(\boldsymbol{x^2}-\mathbf{49}\right) = (x-7)(x+7)$

$$\lim_{x\to 7}\frac{-(-7+x)}{(x^2-49)*\left(2+\sqrt{x-3}\right)} = \lim_{x\to 7}\frac{-(x-7)}{(x-7)(x+7)*\left(2+\sqrt{x-3}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 7}\frac{-1}{(x+7)*(2+\sqrt{x-3})}$$

Sustituyendo en valor de x

$$\lim_{x\to 7}\frac{-1}{(x+7)*(2+\sqrt{x-3})} = \frac{-1}{(7+7)*(2+\sqrt{7-3})} = \frac{-1}{(14)*\left(2+\sqrt{4}\right)} = -\frac{1}{14*4} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{56}}$$

Ej # 56

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$$

Sol:

Aplicando la sustitución del valor de la variable nos encontramos con lo siguiente:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+h}-1}{h} = \frac{\sqrt{1+0}-1}{0} = \frac{\left(\sqrt{1}-1\right)}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}\ indeterminado.$$

Para resolver el ejercicio es necesario buscar otra alternativa y esa es racionalizando;

$$\frac{\sqrt{a+c}-d}{b}=\frac{\sqrt{a+c}-d}{b}*\frac{\sqrt{a+c}+d}{\sqrt{a+c}+d}=\frac{(a+c)-d^2}{b*\sqrt{a+c}+d}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}*\frac{\sqrt{1+h}+1}{\sqrt{1+h}+1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+h}\right)^2-1}{h*\left(\sqrt{1+h}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+h-1}{h\left(\sqrt{1+h}+1\right)}$$

Eliminando términos semejantes y simplificando nos queda

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{1+h}+1\right)}$, haciendo sustitución

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{1+h}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{1}{\sqrt{1}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}\therefore \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

Ejercicios

Calcular los siguientes Límites:

i. $\lim_{x\to -2}(3x^4+2x^2-x+1)$

ii. $\lim_{x\to 3}(x^3-x^2)(-x+1)$

iii. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1+3x}{1+4x^2+3x^4}\right)$

iv. $\lim_{h\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$

v. $\lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

2.5.- Límites Laterales.

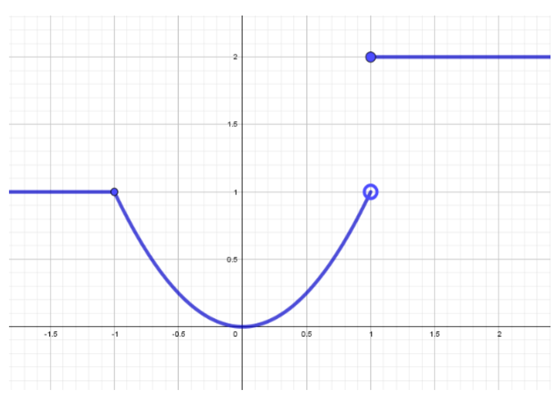
Decimos que el **límite por la derecha** de $f(x)$ cuando x tiende a c es L, si a medida que tomamos valores de x, cada vez más próximos a c, pero mayores que c, entonces $f(x)$ se aproxima a L. Simbólicamente $\lim_{x\to c^+} f(x)=L$

Decimos que el **límite por la izquierda** de $f(x)$ cuando x tiende a c es M, si a medida que tomamos valores de x, cada vez más próximos a c, pero menores que c, entonces $f(x)$ se aproxima a M. Simbólicamente $\lim_{x\to c^-} f(x)=M$.

Ej # 57

Dada la función $f(x)=\begin{cases} 1\,;\, sí\ x<-1 \\ x^2;\, sí-1\le x<1 \\ 2\,;\, sí\ x\ge 1\end{cases}$ $\quad en\ los\ puntos\ x=-1\ \ y\ \ x=1$

Sol:



En $x=-1$, los límites laterales son:

Izquierda $\lim_{x\to -1^-} 1=1$

Derecha $\lim_{x\to -1^+} x^2=1$

Como ambos resultados coinciden, existe el límite y vale **1**

En $x=1$, los límites laterales son:

Izquierda $\lim_{x\to 1^-} x^2=1$

Derecha $\lim_{x \to 1^+} 2 = 2$

Figura 35

Como no coinciden los límites laterales no tiene límite en $x = 1$. Es una función discontinua.

Ej # 58

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 \,; sí\ x < 0 \\ 1; sí\ x = 0 \\ 2x \,; sí\ x > 0 \end{cases}$

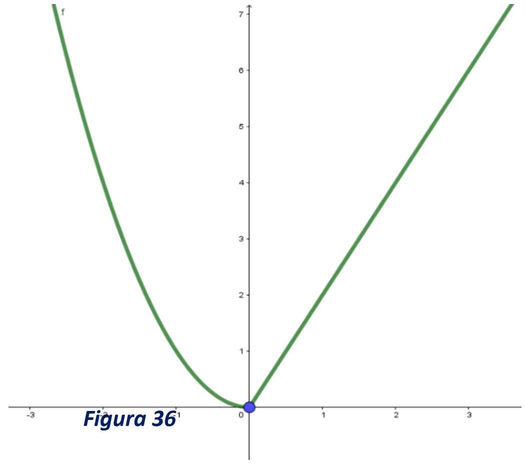


Figura 36

Sol:

En $x = 0$, los límites laterales son:

Izquierda $\lim_{x \to 0^-} x^2 = 0$

Derecha $\lim_{x \to 0^+} 2x = 0$

Como ambos resultados coinciden, existe el límite y vale 0

En $x = 0$, los límites laterales son:

Izquierda $\lim_{x \to 0^-} x^2 = 0$

Derecha $\lim_{x \to 0^+} 2x = 0$

Como coinciden los límites laterales tiene límite en $x = 0$, la función es continua.

Ejercicios

Comprobar la continuidad de las siguientes funciones, construir su gráfica.

a. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 12}{x+3};\ sí\ x > -3 \\ -5 \quad ;\ sí\ x \le -3 \end{cases}$

b. $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2;\ sí\ x < 1 \\ 4 - x \quad ;\ sí\ x \ge 1 \end{cases}$

c. $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2;\ sí\ x < 0 \\ 2 - x\,; 0 < x \le 2 \\ (x-2)^2;\ sí\ x > 2 \end{cases}$

d. $f(x) = \begin{cases} x + 1;\ sí\ x \le 1 \\ \frac{1}{x}\,; 1 < x < 3 \\ \sqrt{x - 3};\ sí\ x \ge 2 \end{cases}$

2.6.- Continuidad y Discontinuidad en un punto.

Se dice que una función es continua cuando es posible hacer su gráfica sin separar el lápiz del papel. Esta definición coloquial de continuidad permite establecer una idea intuitiva de su significado.

Al obtener el $\lim_{x \to a} f(x)$, se busca aproximarse al valor de $x = a$ más no llegar a ese punto, esto es, acercarcarse mucho pero manteniendo $x \neq a$. Puede ser que el límite de una función exista aún cuando la función no está definida en ese punto.

Una función $f(x)$ es contínua en un número a, si se cumplen los siguientes requisitos:

- f está definida en un intervalo abierto que contiene al número a
- el $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, y

- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Ej # 59

Sea la función $f(x) = \begin{cases} 2x + 3; sí\ x < 0 \\ 7; sí\ x = 0 \\ x^2 + 3; sí\ x > 0 \end{cases}$. Determinar si es contínua.

Sol:

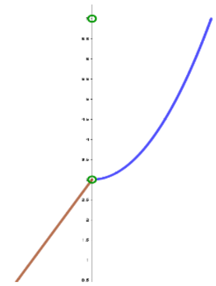
Es necesario que apliquemos límites laterales, para saber sí, la función está definida para todo número real. Hay un cambio de comportamiento en el punto $x = 0$, por lo tanto, habrá que analizar lo que pasa en dicho punto. Dado que el comportamiento a la izquierda y a la derecha de $x = 0$ es diferente, se utilizarán los límites unilaterales.

$$\lim_{x \to 0^-} 2x + 3 = 2 * 0 + 3 \to 3$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^2 + 3 = 0^2 + 3 \to 3$$

Dado que los límites unilaterales tienen el mismo resultado, se dice que $\lim_{x \to 0} f(x) = 3$. Por lo tanto, el límite cuando $x \to 0$ existe y vale 3. Ahora, falta hallar el valor de la función en el punto $x = 0$, se evalúa y $f(0) = 7 \to \lim_{x \to 0} f(x) \neq 7$. No se cumple el tercer requisito de la continuidad: la función es discontinua.

Figura 37



Ejercicios

Estudiar la continuidad de las siguientes funciones.

1) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1; sí\ x \leq 0 \\ 2x - 3; x \geq 0 \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} x + 1; sí\ x < 3 \\ x^2 - 5; sí\ 3 < x < 4 \\ 0; si\ x = 4 \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} x - 1; sí\ x \leq 1 \\ x^2 - 1; sí\ 1 < x < 2 \\ x^2; si\ x \geq 2 \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} 2x + 2; sí\ x < 0 \\ x^2 + 2; sí\ 0 < x < 2 \\ 3x; si\ x > 2 \end{cases}$

2.7.- Continuidad y Discontinuidad en un intervalo.

Una función es continua en un punto si existe límite en él y coincide con el valor que toma la función en ese punto.

Se die que una función es continua en un intervalo abierto sí y sólo sí es continua en cada número del intervalo abierto.

Se dice que una función f es continua por la derecha en el número $\boldsymbol{a}$ si y sólo si se cumplen las tres condiciones siguientes:

i. $f(a)$ Existe

ii. $\lim_{x \to a^+} f(x)$ existe;

iii. $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

Se dice que una función f es continua por la izquierda en el número $\boldsymbol{a}$ si y sólo si se cumplen las tres condiciones siguientes:

i. $f(a)$ Existe

ii. $\lim_{x\to a^-} f(x)$ existe;

iii. $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

Se dice que una función, cuyo dominio contiene al intervalo cerrado $[a, b]$, es continua en el intervalo si y sólo si es continua en el intervalo abierto (a, b), así como continua por la derecha es a y continua por la izquierda en b.

Ej # 60

Demostrar que la función $h(x) = \sqrt{4 - x^2}$ es continua en el intervalo $[-2,2]$.

Sol:

Hay que demostrar que la función $h(x)$ es continua en el intervalo abierto $(-2,2)$.

$$\lim_{x\to -2^+} \sqrt{4 - x^2}$$

Por sustitución

$$\lim_{x\to -2^+} \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - (-2)^2} = \sqrt{4 - 4} = 0$$

Una vez que se ha probado por la derecha se prueba por la izquierda

$$\lim_{x\to 2^-} \sqrt{4 - x^2}$$

Por sustitución

$$\lim_{x\to 2^-} \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - (-2)^2} = \sqrt{4 - 4} = 0$$

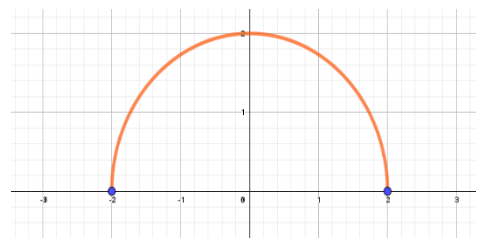


Figura 39

De modo que la función $h(x) = \sqrt{4 - x^2}$ es continua por la derecha en -2 yes continua por la izquierda en 2. En consecuencia, la función es continua en el intervalo cerrado $[-2,2]$.

Ejercicios

Determinar para cuál de los intervalos indicados es una función continua.

a. $f(x) = \frac{2}{x+5}; (3,7), [-6,4), (-\infty, 0), (-5, \infty), [-5, \infty), [-10, -5)$

b. $g(x) = \frac{x}{x-2}; (-\infty, 0), [0, +\infty), (0,2), (0,2], [2, +\infty), [2, +\infty)$

2.8.- Propiedades de las funciones Continuas.

Existen tres tipos de discontinuidades: Una función $f\ (x)$ tiene una **discontinuidad evitable** en x_0 si existe $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ pero $f\ (x_0) \neq L$. En el ejemplo inicial la función tiene una discontinuidad evitable en $x = 3$

Una función $f\ (x)$ tiene una **discontinuidad inevitable de salto finito** en x_0 si no existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$ pero $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ y $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ son finitos. En el ejemplo inicial la función tiene una discontinuidad inevitable de salto finito en $x = 2$.

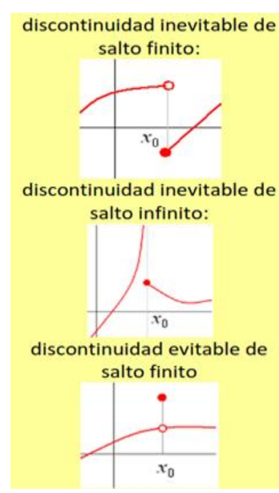


Figura 48

Una función $f\ (x)$ tiene una **discontinuidad inevitable de salto infinito** en x_0 si no existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$ y uno de los dos límites laterales no es finito. En el ejemplo inicial la función tiene una discontinuidad inevitable de salto infinito en $x = 0$.

2.9.- Límites Infinitos y al Infinito. Infinitos e Infinitésimos.

Decimos que $f(x)$ **tiende a infinito** cuando x tiende a c si se puede hacer $f(x)$ tan grande como se quiera al escoger x suficientemente cercano a c. Se escribe $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$

(Esto se lee: el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c es infinito).

De modo parecido definimos la notación

$$\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$$

(Esto se lee: el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c es menos infinito).

Ej # 61

Encontrar el límite de la siguiente función

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}$$

Sol:

Haciendo la sustitución encontramos que:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} = \frac{1}{1-1} - \frac{3}{1-(1)^3} = \frac{1}{0} - \frac{3}{1-1} = \frac{1}{0} - \frac{3}{0}$$

Sabemos que la división por cero no existe, lo que se podría representar de la siguiente manera $\lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} = \frac{1}{0} - \frac{3}{0} \to \infty - \infty$ lo que es una forma indeterminada.

Para eso se recurre a un artificio matemático, es factorizar el denominador del segundo término, aplicando la definición $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{(1-x)} - \frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)}$$

Convirtiendo en una sola facción ambos términos

$$\lim_{x\to 1} \frac{(1+x+x^2)-3}{(1-x)(1+x+x^2)}$$

Desapareciendo el paréntesis del numerador.

$$\lim_{x\to 1} \frac{1+x+x^2-3}{(1-x)(1+x+x^2)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+x^2-2}{(1-x)(1+x+x^2)}$$

Ordenando

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{(1-x)(1+x+x^2)}$$

Factorizando el numerador

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x+2)(x-1)}{(1-x)(1+x+x^2)}$$

Sacando factor común y simplificando

$$\lim_{x\to 1} \frac{-(1-x)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)} = \lim_{x\to 1} \frac{-(x+2)}{(1+x+x^2)}$$

Sustituyendo

$$\lim_{x\to 1} \frac{-(x+2)}{(1+x+x^2)} = \frac{-(1+2)}{1+1+1^2} = -\frac{3}{3} \therefore \lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} = \mathbf{-1}$$

Ej # 62

Encontrar el límite de la siguiente función

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x}{x-1}$$

Sol:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x}{x-1}=\frac{2(1)}{1-1}=\frac{2}{0}\therefore \lim_{x\to 1}\frac{2x}{x-1}=\infty$$

Ej # 63

Encontrar el límite de la siguiente función

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{9x^2+3x}-3x)$$

Sol:

Sustituyendo el valor de la variable x.

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{9x^2+3x}-3x)=\sqrt{9(\infty)^2+(\infty)}-3(\infty)=\sqrt{9(\infty)^2+(\infty)}-3\infty$$

Resulta ser indeterminado, entonces buscando una artificio matemático, se racionaliza la función, también conocido como producto por su conjugada.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+3x}-3x\right)*\frac{(\sqrt{9x^2+3x}+3x)}{(\sqrt{9x^2+3x}+3x)}$$

Efectuando el producto de diferencia de cuadrados y haciendo reducción de términos semejantes.

$$\rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{9x^2+3x-9x^2}{\sqrt{9x^2+3x}+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{9x^2+3x}+3x}$$

Sustituyendo encontramos que:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{9x^2+3x}+3x}=\frac{3(\infty)}{\sqrt{9(\infty)^2+3(\infty)}+3(\infty)}=\frac{3(\infty)}{\sqrt{9(\infty)^2+3(\infty)}+3(\infty)}$$

¿Qué otro artificio se puede hacer?

Separemos los términos que están dentro del radical y se le aplica la propiedad de potenciación.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{9x^2}+\sqrt{3x}+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{3x+3^{\left(\frac{1}{2}\right)}x^{\frac{1}{2}}+3x}$$

Cuando nos encontramos en situaciones como ésta, se aplica una definición que dice: **Se divide el numerador y el denominador entre la mayor potencia que aparece en el denominador:**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{3x+3^{\left(\frac{1}{2}\right)}x^{\frac{1}{2}}+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x}{x}}{\frac{3x}{x}+\frac{(3^{\left(\frac{1}{2}\right)}x^{\frac{1}{2}})}{x}+\frac{3x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{3+\frac{(3^{\left(\frac{1}{2}\right)}x^{\frac{1}{2}})}{x}+3}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{6+\frac{(3^{\left(\frac{1}{2}\right)}x^{\frac{1}{2}})}{x}}\rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{3}{6+\frac{3^{\left(\frac{1}{2}\right)}}{x}+\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{6+\frac{\sqrt{3}}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

Separando términos y aplicando límite a cada uno y sustituyendo.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3}{6}+\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{x}}+\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\frac{3}{6}+\infty+\infty\therefore\lim_{x\to\infty}(\sqrt{9x^2+3x}-3x)=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

2.10- Discontinuidad Finita e Infinita.

En matemáticas el símbolo ∞ se lee infinito y se refiere concretamente a una posición dentro de la recta de los números reales, no representa ningún número real.

Si una variable independiente x está creciendo indefinidamente a través de valores positivos, se escribe $x \to +\infty$ (que se lee: x tiende a más infinito), y si decrece a través de valores negativos, se denota como $x \to -\infty$ (que se lee: x tiende a menos infinito). Similarmente, cuando una función $f(x)$ crece indefinidamente y toma valores positivos cada vez mayores, se escribe $f(x) \to \infty$, y si decrece tomando valores negativos escribimos $f(x) \to \infty$.

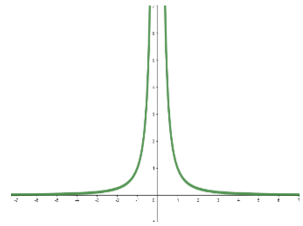


Figura 59

Miremos en la figura 39 la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$, para valores de x positivos muy grandes.

Si tomamos x cada vez mayor, $f(x)$ está cada vez más cerca de 0, pero nunca tomará el valor de cero. Si x es suficientemente grande podemos conseguir que $f(x)$ se acerque a 0 tanto como queramos. Decimos que $f(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$.

Caso 1:

$\lim_{x \to p} f(x) = +\infty$, implica que: $\forall A > 0$, existe $\delta > 0 \,/\, \forall x \in E^* \; f(x)_{p,\delta} > A$ $\lim_{x \to p} f(x) = +\infty$, si para cualquier número positivo A (tan grande como se quiera), podemos encontrar un número δ tal que, para todos los x dentro del entorno reducido de p de radio δ se cumple que $f(x) > A$.

Expresándolo de otra manera: si para cualquier número positivo A que se considere existe un entorno reducido de p donde la función vale más que A, quiere decir que $f(x)$ puede hacerse mayor que cualquier número, con tal de que x se acerque lo suficiente a . Por eso se dice que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a p es $+\infty$.

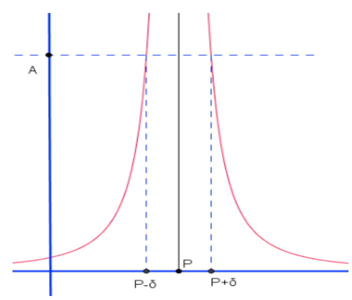


Figura 60

Caso 2:

$\lim_{x \to p} f(x) = -\infty$, implica que: $\forall A > 0$, existe $\delta > 0 \,/\, \forall x \in E^* \; f(x)_{p,\delta} < -A$

$\lim_{x \to p} f(x) = +\infty$, si para cualquier número positivo A (tan grande como se quiera), podemos encontrar un número δ tal que, para todos los x dentro del entorno reducido de p de radio δ se cumple que $f(x) > A$.

Expresándolo de otra manera: si para cualquier número positivo A que se considere existe un entorno reducido de p donde la función vale más que A, quiere decir que $f(x)$ puede hacerse mayor que cualquier número, con tal de que x se acerque lo suficiente a . Por eso se dice que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a p es $-\infty$.

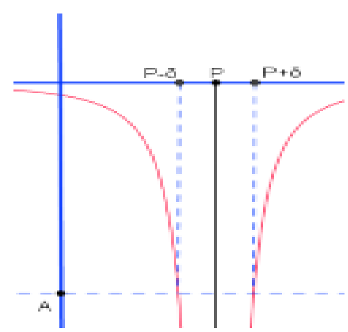


Figura 61

Caso 3:

Para cualquier número positivo F (por grande que sea), es posible encontrar un número positivo D tal que para todos los x mayores que F, $f(x)$, es mayor que D. Es decir que $f(x)$, puede ser mayor que cualquier número, si x, es lo suficientemente grande.

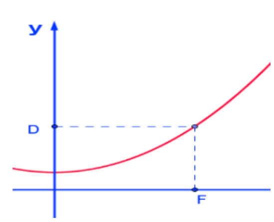


Figura 62

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, implica que: $\forall F > 0$, existe $D > 0 \mid \forall x > F, f(x) > D$

Caso 4:

Para cualquier número positivo F (por grande que sea), es posible encontrar un número negativo D tal que para todos los x mayores que $F, f(x)$ es menor que D. Es decir que $f(x)$ puede ser menor que cualquier número, si x es lo suficientemente grande.

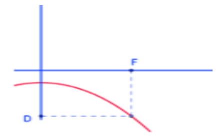


Figura 63

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, implica que: $\forall F > 0$, existe $D > 0 \mid \forall x < -F, f(x) > D$

Caso 5:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, implica que: $\forall F > 0$, existe $D > 0 \mid \forall x < -F, f(x) > D$

Caso 6:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, implica que: $\forall F < 0$, existe $D < 0 \mid \forall x < -F, f(x) < -D$

Caso 7:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \mathrm{b}$, implica que: $\forall \varepsilon > 0$, existe $D > 0 \mid \forall x > F, f(x) \,\epsilon\, E^{*}_{b,\epsilon}$

Caso 8:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \mathrm{b}$, implica que: $\forall \varepsilon > 0$, existe $D > 0 \mid \forall x < -F, f(x) \,\epsilon\, E^{*}_{b,\epsilon}$

Teoremas acerca los límites al Infinito

$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} = 0, a > 0$

$\lim_{x \to \infty} x^r = \infty, \mathrm{r} > 0$

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, Si el grado de $f(x) <$ el grado de $g(x)$

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, Si el grado de $f(x) >$ el grado de $g(x)$

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$, Si el grado de $=$ el grado de $g(x)$ donde a y b son los coeficientes de las variables de mayor potencia de $f(x)$ y $g(x)$.

Teoremas acerca los límites Infinitos

Si n es cualquier número entero positivo, entonces:

a. $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$

b. $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty,\ si\ n\ es\ par$

c. $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty,\ si\ n\ es\ impar$

Si c es cualquier número real, $\lim_{x \to \mathrm{a}} f(x) = 0\ y\ \lim_{x \to \mathrm{a}} g(x) = c\ y\ c \neq 0$

d. $\lim_{x \to \mathrm{a}} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$, si $\mathrm{c} > 0$ y $\mathrm{f(x)} \to 0^{+}$

e. $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$, si $c > 0$ y $f(x) \to 0^-$

f. $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$, si $c < 0$ y $f(x) \to 0^+$

g. $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$, si $c < 0$ y $f(x) \to 0^-$

Sean f y g funciones con dominios D_1 y D_2 respectivamente y sea "a"un número tal que todo intervalo abierto que contenga a "a" contiene números diferentes de "a" en $D_1 \cap D_2$

$Si \lim\limits_{x\to a} f(x) = c \quad y \ \lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty \therefore$

h. $\lim\limits_{x\to a}[f(x) + g(x)] = +\infty$

i. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)] = +\infty$, si $c > 0$

j. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)] = -\infty$, si$c < 0$

k. $\lim\limits_{x\to a}\frac{[f(x)]}{g(x)} = 0$

$Si \lim\limits_{x\to a} f(x) = c \quad y \ \lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty \therefore$

l. $\lim\limits_{x\to a}[f(x) + g(x)] = -\infty$

m. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)] = -\infty$, si $c > 0$

n. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)] = +\infty$, si$c < 0$

o. $\lim\limits_{x\to a}\frac{[f(x)]}{g(x)} = 0$

$Si \lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \ y \ \lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty \ \therefore$

p. $\lim\limits_{x\to a}[f(x) + g(x)] = +\infty$

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)] = +\infty,$

$Si \lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty \ y \ \lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty \ \therefore$

q. $\lim\limits_{x\to a}[f(x) + g(x)] = -\infty$

r. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)] = +\infty,$

Ej # 64

Veamos siguiente ejemplo donde se pide hallar: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x}{x-2}$

Sol:

Realizando la sustitución

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x}{x-2} = \frac{2*2}{2-2} = \frac{4}{0}$ **Indefinido.**

Como podemos aproximarnos a 2 por la derecha como por la izquierda tenemos: $x \to 2^+ \therefore x > 2 \therefore x - 2 > 0 \therefore x \to 0^+$. Así el numerador tiende a ser positivo y el denominador tiende a 0^+ , tenemos entonces:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x}{x-2} = +\infty$$

Analicemos ahora cuando se aproxima a 2 por la izquierda: $x \to 2^- \therefore \mathrm{x} < 2 \therefore \mathrm{x} - 2 < 0 \therefore \mathrm{x} \to 0^+$. Así el numerador tiende a ser positivo y el denominador tiende a 0^- , tenemos entonces:
$$\lim_{x\to 2} \frac{2x}{x-2} = -\infty$$
Al ser los límites laterales diferentes, el límite no existe puesto que el límite es único.

Ejercicios

Calcular los siguientes límites:

1) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x-2}$

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{2x^2-2n+5}{x-2}$

3) $\lim_{x\to\infty} 3 - \frac{3x+5}{x+1}$

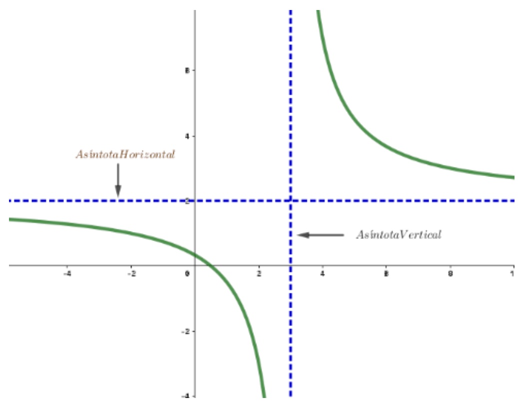
4) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4}{\sqrt{x^4+x-2}}$

5) $\lim_{r\to 2^-} \frac{2}{(r-2)^2} + \frac{r+1}{\sqrt{n-2}}$

2.11- Asíntotas Verticales y Horizontales.

Asíntota Horizontal: La recta $y = b$ es una **Asíntotas Horizontales**, de la gráfica de la función $y = f(x)$ si:
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \textbf{ ó } \lim_{x\to-\infty} f(x) = b.$$

Figura 64



Asíntotas Verticales: La recta $x = c$ es una **asíntota vertical** de la gráfica de $y = f(x)$, si cualquiera de las siguientes cuatro proposiciones es verdadera.

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to c^-} f(x) = -\infty$$

Ej # 65

Estudiar las asíntotas de la siguiente función $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}}$

Sol:

Asíntota Horizontal (A.H)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{x^2-4}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\mathbf{1}=\mathbf{1}\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{x^2-4}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\mathbf{1}=1\end{array}\right\}\Longrightarrow y=1\ es\ una\ asíntota\ horizontal.$$

Posición de la curva respecto de la asíntota Le damos un valor lo suficientemente elevado $(x\to+\infty)$.

$$\boldsymbol{f(x)}=\frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{x^2-4}}\Longrightarrow f(20)=\frac{20^2}{20^2-4}=\frac{400}{396}=1.01>1$$

Por lo tanto, por la derecha $(x\to+\infty)$, la curva está por encima de la asíntota.
Le damos un valor lo suficientemente elevado $(x\to-\infty)$.

$$\boldsymbol{f(x)}=\frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{x^2-4}}\Longrightarrow f(-20)=\frac{(-20)^2}{(-20)^2-4}=\frac{400}{396}=1.01>1$$

Por lo tanto, por la izquierda $(x\to-\infty)$, la curva está por encima de la asíntota.

Asíntota Vertical (A.V)

Posibles A.V, salen de la función que está en el denominador de la función $\boldsymbol{x^2-4.}$
Despejando la variable x, entonces $\boldsymbol{x^2-4=x^2=4\ \therefore\ x=\pm 2}$

Límites laterales:

Cuando $x=2$

$\lim\limits_{x\to c^+}f(x)=\infty$

$\lim\limits_{x\to c^-}f(x)=\infty$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{x^2-4}}=\dfrac{4}{4-4}=\dfrac{4}{0^+}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{x^2-4}}=\dfrac{4}{4-4}=\dfrac{4}{0^-}=-\infty\end{array}\right\}\Longrightarrow x=2\ es\ una\ asíntota\ horizontal.$$

Posición de la curva respecto de la asíntota
Queda determinada por los límites laterales

Cuando $\boldsymbol{x=-2}$

$\lim\limits_{x\to c^+}f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to c^-}f(x)=-\infty$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{x^2-4}}=\dfrac{4}{4-4}=\dfrac{4}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{x^2-4}}=\dfrac{4}{4-4}=\dfrac{4}{0^+}=+\infty\end{array}\right\}$$

$\Longrightarrow x=-2\ es\ una\ asíntota\ horizontal.$

Posición de la curva respecto de la asíntota.
Queda determinada por los límites laterales

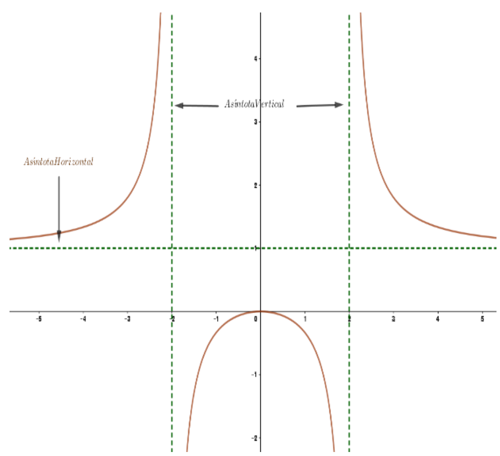


Figura 65

Ejercicios

Estudiar las asíntotas de la siguiente función:

$$f(x)=\frac{x}{x+4}$$
$$g(x)=\frac{x^3}{x^2+3x-10}$$
$$h(x)=\frac{x^3+1}{x^3+x}$$
$$i(x)=\frac{x}{\sqrt[4]{x^4+1}}$$
$$d(x)=\frac{x-9}{\sqrt{4x^2+3x+2}}$$

2.12- Introducción de las formas Indeterminadas.

Indeterminaciones del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ que son cociente de polinomios y/o de raíces de polinomios.

Para resolver estas indeterminaciones es preciso averiguar en cuál de los casos siguientes nos encontramos:

1. El numerador tiende a ∞ más rápidamente que el denominador, en cuyo caso el cociente tenderá a ∞. Además habrá que determinar el signo del límite, es decir, si tiende a $+\infty$ o a $-\infty$.
2. El denominador tiende a ∞ más rápidamente que el numerador, en cuyo caso el cociente tenderá a 0.
3. Numerador y denominador quedan (los dos son infinitos del mismo orden), en cuyo caso el límite será un número finito distinto de 0.

Una idea que se puede aplicar en estos casos es dividir numerador y denominador por el término que converge a infinito más rápidamente. Para ello se debe recordar que, cuando $x \to \infty$, $\boldsymbol{x^n}$ tiende a ∞ más rápidamente cuanto mayor es n.

Ej # 66

Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^3+1}{2x^3+x}$

Sol:

Haciendo sustitución encontramos

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3+1}{2x^3+x}=\frac{4(\infty)^3+1}{2(\infty)^3+\infty}=\frac{\infty}{\infty}\ Indeterminado$$

Aplicando el artificio matemático de buscar a potencia de mayor grado en el denominador y se divide cada uno de los elementos.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4x^3}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3}+\frac{x}{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4+\frac{1}{x^3}}{2+\frac{1}{x^2}}=2$$

Regla para el caso de límites, en $+\infty$ o en $-\infty$, de cocientes de polinomios: Si $p(x)$ y $q(x)$ son dos polinomios tales que el término de mayor grado de $p(x)$ es ax^m y el término de mayor grado de $q(x)$ es bx^n, entonces se tiene:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{p(x)}{q(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^m}{bx^n}\ y\ \lim_{x\to-\infty}\frac{p(x)}{q(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^m}{bx^n}$$

Ej # 67

Calcular $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^5-3x^3+x^2-x+4}{x^4+x^3-5}$

Sol:

Haciendo sustitución encontramos que el ejercicio es indeterminado, por lo que recurrimos a tomar los elementos de mayor grado del numerador y denominador.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^5-3x^3+x^2-x+4}{x^4+x^3-5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^5}{x^4}$$

Simplificando la variable,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^5}{x^4} = \lim_{x\to-\infty} 2x \therefore \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^5-3x^3+x^2-x+4}{x^4+x^3-5} = -\infty$$

Indeterminaciones de tipo $\infty - \infty$ con raíces cuadradas

La idea en los casos en que se tiene una diferencia de raíces es multiplicar y dividir por la suma de las raíces (lo que se suele llamar el conjugado). De este modo la indeterminación se transformará en una del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Ej # 68

Calcular $\lim_{x\to+\infty} (x\sqrt{x+2} - \sqrt{x^3+1})$

Sol:

Haciendo sustitución encontramos:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x\sqrt{x+2} - \sqrt{x^3+1}\right)$$

$$= (\infty\sqrt{\infty+2} - \sqrt{(\infty)^3+1} \therefore \infty - (+\infty), es\ una\ indeterminación.$$

Aplicando artificio matemático se racionaliza la función.

$$\lim_{x\to+\infty} (x\sqrt{x+2} - \sqrt{x^3+1}) * \frac{(x\sqrt{x+2} + \sqrt{x^3+1})}{(x\sqrt{x+2} + \sqrt{x^3+1})}$$

Realizando la operación queda de la siguiente manera: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x\sqrt{x+2} - \sqrt{x^3+1}\right)^2}{(x\sqrt{x+2} + \sqrt{x^3+1})}$$

Desarrollando el binomio

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(x+2) - (x^3+1)}{(x\sqrt{x+2} + \sqrt{x^3+1})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+2x^2-x^3-1}{(x\sqrt{x+2} + \sqrt{x^3+1})} \therefore \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-1}{(x\sqrt{x+2} + \sqrt{x^3+1})}$$

Sustituyendo se llega a un límite indeterminado de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, se puede resolver como el ejemplo anterior $x \to +\infty$.

El numerador se comporta de la forma: $2x^2$

El denominador se comporta de la forma $x\sqrt{x} + \sqrt{x^3} \to x\sqrt{x} + x\sqrt{x} \therefore 2x\sqrt{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{2x\sqrt{x}} \to \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x}}$$

Aplicando las propiedades de potenciación:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} \therefore \lim_{x\to+\infty} (x\sqrt{x+2} - \sqrt{x^3+1}) = +\infty$$

Indeterminaciones de tipo $\frac{0}{0}$ que son cociente de polinomios

Lo que sucede en estos casos es que ambos polinomios tienen una raíz común. Lo que hay que hacer es factorizar el numerador y el denominador y simplificar. Se puede factorizar aplicando la división sintética o aplicando Ruffini.

Ej # 67

Calcular $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-x^2-4x+4}{x^2-x-2}$

Sol:

Por sustitución

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-x^2-4x+4}{x^2-x-2}=\frac{(2)^3-(2)^2-4(2)+4}{(2)^2-2-2}=\frac{8-4-8+4}{4-4}=\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}\ \boldsymbol{Ind}.$$

Factorizando el denominador

$\boldsymbol{x^2-x-2}=(x-2)(x+1)$

Factorizando el numerador, mediante división del numerador por el término $(x-2)$,

$$\begin{array}{r|l}
x^3-x^2-4x+4 & \ \ (x-2) \\ \cline{2-2}
-x^3+2x^2\qquad\qquad & x^2+x-2 \\
x^2-4x+4 & \\
-x^2+2x\quad\ & \\
-2x+4 & \\
2x-4 & \\
0\quad\ \ &
\end{array}$$

El numerador se factoriza de la siguiente manera $\boldsymbol{x^3-x^2-4x+4}=(x-2)(x^2+x-2)$.

Haciendo la nueva representación de la descomposición del numerador y denominador quedaría así:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+x-2)}{(x-2)(x+1)}$$

Simplificando

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+x-2)}{(x-2)(x+1)}\to\lim_{x\to 2}\frac{(x^2+x-2)}{(x+1)}$$

Haciendo la sustitución del valor de x

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x^2+x-2)}{(x+1)}=\frac{(2)^2+2-2}{2+1}=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$$

Ejercicios

Calcular los siguientes límites:

- **i.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3-5}{x^2+7x+1}$
- **ii.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2-5}{x^3+x}$
- **iii.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3-5}{x+1}$
- **iv.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^4-5x+2}{2x^4-2x}$
- **v.** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-4}$

vi. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

2.13- Límite Fundamental Algebraico (Número e).

El límite de una sucesión $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$,cuando $n \to \infty$ es:

$\lim\limits_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1^{\infty}$, Indeterminado.

Sin embargo, se demuestra que $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

El número e se puede expresar de la siguiente manera:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

El límite de esta sucesión es el número irracional $e = 2{,}7182818$... (No será demostrado por su dificultad.)

Este resultado tiene gran importancia, ya que el número e aparecerá, en general, en los límites de la forma 1^{∞}.

Propiedad para calcular límites de la forma $\mathbf{1}^{\infty}$.

Si (a_n) y (b_n) son dos sucesiones tales que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n^{(a_n-1)} = c$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = e^c$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Ej # 68

$\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{x}}$

Sol:

Aplicando la sustitución de la variable x

$\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{x}} = (1+3*0)^{\frac{2}{0}} \to (1+0)^{\frac{2}{0}} \to 1^{\infty}$ es una indeterminación.

Cuando nos encontramos en situaciones como estas se aplica $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} g(x)*[f(x)-1]}$

$\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{x}\right)*(1+3x-1)}$ realizando la operación en el límite

$e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{x}\right)*(3x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{6x}{x}\right)}$ se simplifica la variable

$\to e^{\lim\limits_{x\to 0}(6)} \therefore \lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{x}} = \boldsymbol{e^6}$.

Ejercicios:

Calcular los siguientes límites:

i. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

ii. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}$

iii. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}$

iv. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+5}\right)^{\frac{x^2+1}{x-1}}$

v. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x+3}\right)^{x+1}$

2.14- Límites Trigonométricos

Si c es un número real en el dominio de la función trigonométrica dada, entonces, se cumple que:

i. $\lim_{x\to c} sen(x) = sen(c)$

ii. $\lim_{x\to c} cos(x) = cos(c)$

iii. $\lim_{x\to c} tan(x) = tan(c)$

iv. $\lim_{x\to c} cot(x) = cot(c)$

v. $\lim_{x\to c} sec(x) = sec(c)$

vi. $\lim_{x\to c} csc(x) = csc(c)$

vii. $\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$

viii. $\lim_{x\to 0} cosx = 1$

Antes de todo es necesario recordar algunas identidades

1. $sen^2x + \cos^2 x = 1$
2. $sen^2x = \frac{1-cos2x}{2}$
3. $Cos^2x = \frac{1+cos2x}{2}$
4. $sen2x = 2senxcosx$
5. $Cos2x = \cos^2 x - sen^2x$
6. $Sen(\alpha+\beta) = sen\alpha cos\beta + sen\beta cos\alpha$
7. $Sen(\alpha-\beta) = sen\alpha cos\beta - sen\beta cos\alpha$
8. $Cos(\alpha+\beta) = cos\alpha cos\beta - sen\alpha sen\beta$
9. $Cos(\alpha-\beta) = cos\alpha cos\beta + sen\alpha sen\beta$

Ej # 68

Calcular el límite de $\lim_{x\to 0}\frac{(1-COSx)}{x}$

Sol:

Por sustitución nos quedaría de la siguiente manera

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-Cosx)}{x} = \frac{1-\cos(0)}{0} = \frac{1-1}{0} \to \frac{0}{0}\ ind$$

Multiplicando por la conjugada del numerador

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-Cosx)}{x}*\frac{1+Cosx}{1+Cosx}\to\lim_{x\to 0}\frac{(1-Cosx)*(1+Cosx)}{x(1+Cosx)}$$

Diferencias de cuadrados $(a-b)*(a+b)=a^2-b^2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-Cosx)*(1+Cosx)}{x(1+Cosx)}=\lim_{x\to 0}\frac{1^2-Cos^2x}{x(1+Cosx)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-Cos^2x}{x(1+Cosx)}$$

Despejando $\boldsymbol{sen^2x+\cos^2x=1\to cos=1-sen^2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-sen^2x)}{x(1+Cosx)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-1+sen^2x)}{x(1+Cosx)}\to\lim_{x\to 0}\frac{sen^2x}{x(1+Cosx)}$$

En el numerador se puede aplicar $a^2=a*a$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen^2x}{x(1+Cosx)}=\lim_{x\to 0}\frac{senx*senx}{x(1+Cosx)}$$

Separando los productos

$$\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}*\frac{senx}{(1+Cosx)}$$

Sustituyendo por sus equivalencias

$$\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}*\frac{senx}{(1+Cosx)}=1*0\therefore\lim_{x\to 0}\frac{(1-Cosx)}{x}=\mathbf{0}$$

Ej # 69

Calcular el límite de $\lim_{x\to 0}\frac{(1-Cosx)}{x^2}$

Sol:

Por sustitución

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-Cosx)}{x^2}=\frac{1-\cos(0)}{0^2}=\frac{1-1}{0}=\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}\boldsymbol{ind}$$

Multiplicando por la conjugada

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-Cosx)}{x^2}*\frac{(1+Cosx)}{(1+Cosx)}=\lim_{x\to 0}\frac{1^2-Cos^2x}{x^2(1+Cosx)}$$

Sustituyendo $Cos^2x=1-sen^2x$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-1+sen^2x}{x^2(1+Cosx)}=\lim_{x\to 0}\frac{sen^2x}{x^2(1+Cosx)}\to\lim_{x\to 0}\frac{senx*senx}{x*x(1+Cosx)}$$

Separando términos

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{senx}{x}*\frac{senx}{x}*\frac{1}{(1+Cosx)}\right)$$

Sustituyendo se tiene que:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{senx}{x}*\frac{senx}{x}*\frac{1}{(1+Cosx)}\right)=1*1*\frac{1}{2}\therefore\lim_{x\to 0}\frac{(1-Cosx)}{x^2}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

Ejercicios:

Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{x-sen3x}{x+sen2x}$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}sen\left(\frac{x}{3}\right)$

c) $\lim_{x\to 0}\frac{sen2x}{sen5x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{senx}{tanx}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sen4x}{sen2x}$

2.15- Definición de función real de varias variables reales. Dominio y Rango

DEFINICIÓN. Una función escalar de dos variables $f: (x, y) \in\ U\ \subseteq R^2 \to\ f(x, y) \in R$ es una regla f que asigna a cada punto (x, y) de un conjunto $U\ \subseteq R^2$un único número real $f(x, y)$. El conjunto U se llama dominio de definición de la función. Estas funciones también se llaman campos escalares de dos variables.

Otra definición que se puede adoptar esta dicho de la siguiente forma:

Denotemos por $\mathbb{R}^2 = \{(x, y): x, y\ \in \mathbb{R}\}$ el plano euclidiano, y sea $D \subset\ \mathbb{R}^2$. Una aplicación

$$f: \quad D \to\ \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto z = f(x, y)$$

Se denomina una función valuada real de dos variables reales. Es usual denotar por $z = f(x, y)$ a estas funciones.

Se llamaran variables independientes a $x\ e\ y$, y la variable dependiente a z.

El dominio de la función f es el conjunto

$$Domf\ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Fijase bien que: $D \subset Domf$.

El conjunto

$$Im\ f = \{z = f(x, y): (x, y) \in Domf\} \subset \mathbb{R}.$$

Es la imagen o rango de la función.

Se finaliza diciendo que, la gráfica o grafo de f es el conjunto.

$$Grafo\ f\ = \left\{\big(x, y, f(x, y)\big): (x, y) \in Domf\right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Geométricamente, el grafo de f se interpreta como una superficie en el espacio cuya proyección sobre el plano OXY es $Dom\ f$.

Ej # 70

Hallar el dominio y el rango de la función $f(x, y) = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$. Esbozar su gráfica.

Sol:

A como se puede apreciar el radical no es negativo, por lo que se afirma que

$$Domf\ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 16 - 4x^2 - y^2 \geq 0\}.$$

Despejando quedaría de la siguiente forma:

$$Domf\ = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} \leq 1\right\}$$

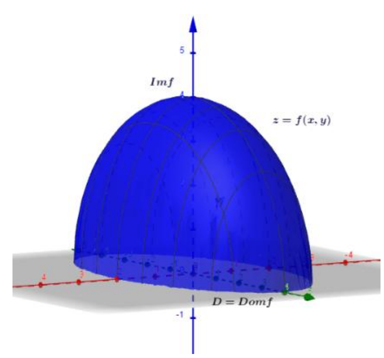


Figura 66

El cual constituye el recinto interior a la elipse de semiejes 2 y 4 en el plano OXY:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}\leq 1$$

Por otra parte, al ser $4x^2+y^2\geq 0$, el valor máximo de f se toma en el punto (0,0), donde $f(0,0)\ =\ \sqrt{}16\ =\ 4$; mientras que el valor mínimo se toma cuando $4x^2+y^2=16$, es decir, sobre la elipse anterior, donde la función es idénticamente nula. Así pues,

$$\begin{aligned} Im\, f &= \{z=f(x,y):(x,y)\in Domf\} \\ &= \{z\in\mathbb{R}: 0\leq z\leq 4\} \end{aligned}$$

El grafo de f viene dado por:

$$\begin{aligned} Grafo\, f &= \left\{\left(x,y,\sqrt{16-4x^2-y^2}\right):(x,y)\in Domf\right\}. \\ &= \left\{\left(x,y,\sqrt{16-4x^2-y^2}\right):\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}\leq 1\right\}, \end{aligned}$$

El cual puede ser representado como la mitad superior del elipsoide

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{16}=1$$

En efecto

$$\begin{aligned} z=f(x,y), z\geq 0 &\Rightarrow z=\sqrt{16-4x^2-y^2}, z\geq 0 \\ &\Rightarrow 16-4x^2-y^2, z\geq 0 \\ &\Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{16}=1. \end{aligned}$$

Ej # 71

Sea la función $f(x,y)=\sqrt{25-x^2-y^2}$, encontrar el Dominio y la Imagen.

Sol:

$$Domf=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 25-x^2-y^2\geq 0\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\leq 25$$

es decir, la región encerrada por la circunferencia de centro el origen y radio cinco. Su rango será $R=\{z\in R|0\leq z\leq\ 5\}$, mientras la gráfica será:

$$\begin{aligned} Grafo\, f &= \{(x,y,z):\in\mathbb{R}^3|\ (x,y)\in D, z=f(x,y)\}. \\ &= \{(x,y,z): x^2+y^2=25,\ \ 0\leq z\leq 5\} \end{aligned}$$

que es la semiesfera superior de centro el origen y radio cinco.

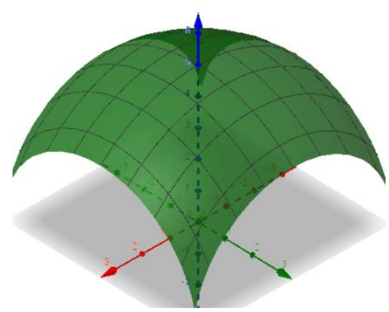


Figura 67

Ejercicios:

Calcular el dominio de $\boldsymbol{f}$ y dibuje su región en $\mathbb{R}^2$.

$$f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2-1}$$

$$f(x,y)=\frac{4}{4-x^2-y^2}$$

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-4y^2}$$

$$f(x,y)=\frac{x^4-y^4}{x^2-y^2}$$

2.16- Curvas y Superficies de nivel, Gráfica.

Las curvas de nivel son aplicadas en el área de la Ingeniería civil, para mostrar en el plano curvas isotermas, mapas topográficos de regiones montañosas que identifican las curvas de altitud de contorno de una superficie o líneas equipotenciales, por mencionar algunas. En las curvas

Isotermas las líneas continuas enlazan la misma temperatura en la zona. En los mapas topográficos, si se desplazara una persona a lo largo de una curva de nivel se mantendría a la misma altitud.

Una definición más concreta de **Curva de Nivel:** El conjunto de puntos (x, y) en el plano donde una función de dos variables independientes tiene un valor constante $f(x, y) = c$, es una curva de nivel de f.

La proyección perpendicular sobre el plano $\boldsymbol{xy}$, de la traza de la superficie $\mathbb{S}$ sobre el plano se conoce como curva de nivel o línea de contorno. Al conjunto de estas curvas de nivel se le llama mapa de contorno.

Ej # 72

Trazar algunas curvas de nivel de la función $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 4$ para $c = 4, c = 3, c = 0$ $y\ c = -5$.

Sol:

a) Para $c = 4$;

$-x^2 - y^2 + 4 = 4 \rightarrow -x^2 - y^2 = 0 \therefore x^2 + y^2 = 0 \qquad \boldsymbol{R_1}$

la expresión $\boldsymbol{R_1}$ representa un punto cuando $f(x, y) = c = 4$

b) Para $c = 3$;

$-x^2 - y^2 + 4 = 3 \rightarrow -x^2 - y^2 = -1 \therefore x^2 + y^2 = 1 \qquad \boldsymbol{R_2}$

la expresión $\boldsymbol{R_2}$ representa una circunferencia de radio $r = 1$.

c) Para $c = 0$;

$-x^2 - y^2 + 4 = 0 \rightarrow -x^2 - y^2 = -4 \therefore x^2 + y^2 = 4 \;\; \boldsymbol{R_3}$

la expresión $\boldsymbol{R_3}$ representa una circunferencia de radio $r = 2$

d) Para $c = -5$;

$-x^2 - y^2 + 4 = -5 \rightarrow -x^2 - y^2 = -9 \therefore x^2 + y^2 = 9 \;\; \boldsymbol{R_4}$

la expresión $\boldsymbol{R_4}$ representa una circunferencia de radio $r = 3$

La superficie es un paraboloide abierto hacia abajo, su extremo máximo está en $z = 4$ y las curvas de nivel de la función son círculos. Tal como se ilustra a continuación en las figuras 1, 2 y 3.

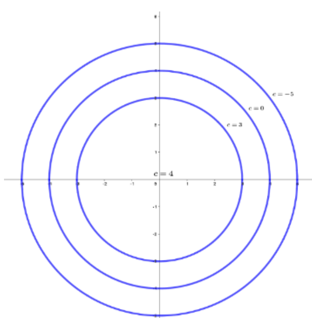


Fig: 1

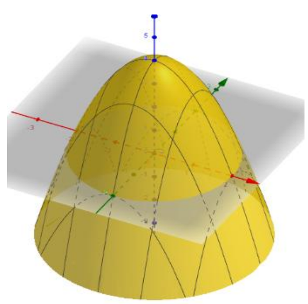


Fig: 2

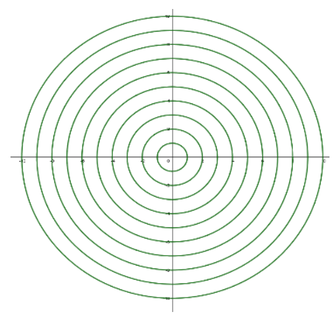


Fig: 3

Figura 68

Ejercicios:

i. Trazar algunas curvas de nivel de la función $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 5$, para $c = -4, c = -1, c = 1,$ y $c = 4$
ii. Describir el comportamiento de $f(x,y) = x^2 - y^2$ mediante el bosquejo de algunas curvas de nivel.
iii. Bosqueje la curva de nivel de $f(x,y) = x^2 + y^2$ que pasa por $(1,1)$.
iv. Graficar las curvas de nivel de $f(x,y) = 1 + x^2 + y^2$

SUPERFICIES DE NIVEL
Si $f\ (x,y,z)$ es una función de tres variables y k una constante que debe satisfacer los valores del rango de la función. La gráfica de la ecuación $f(x,y,z) = k$ es una superficie de nivel.

Por ejemplo, los troncos de los árboles con muchos años de vida contienen en su estructura interna superficies de nivel donde han quedado registrado los periodos de tiempo que han vivido.

Gracias a los aparatos científicos que se han construido para la ciencia médica podemos observar las superficies de nivel del cuerpo humano a diferentes niveles de profundidad de su superficie, permitiendo explorar dentro del mismo.

Ej # 72
Comprobar que la traza de la esfera $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 10$, sobre el plano $f(x,y,z) = y + z - 4$, es una elipse.
Sol:
Para hallar la ecuación de la traza es necesario resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 10 & E_1 \\ \qquad y + z = 4 & E_2 \end{cases}$$

Despejando z en la E_2, luego se sustituye en a E_1
$z = 4 - y \rightarrow x^2 + y^2 + (4 - y)^2 = 10$
Desarrollando el binomio,
$x^2 + y^2 + 16 - 8y + y^2 = 10$

Agrupando términos
$x^2 + 2y^2 - 8y + 16 - 10 = 0$

$$\rightarrow x^2 + 2y^2 - 8y + 6 = 0$$

Factorizando y completando cuadrados en el segundo término $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$.

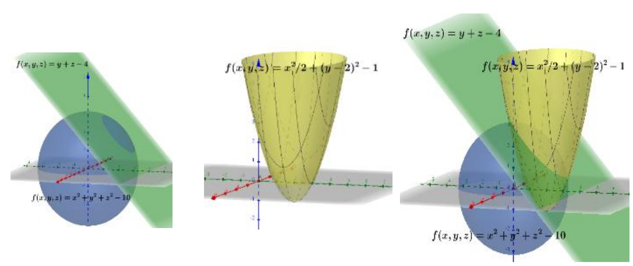


Fig: 1 Fig: 2 Fig: 3

Figura 69

$x^2 + (2y^2 - 8y + 6) = 0$
$x^2 + [(2y^2 - 8y) + 6] = 0 \rightarrow x^2 + [2(y^2 - 4y)] + 6 = 0$

$$\rightarrow x^2 + \left[2\left(y^2 - 4y + \left(\frac{4}{2}\right)^2\right)\right] + 6 - 8 = 0$$

$\rightarrow x^2 + [2(y^2 - 4y + 4)] - 2 = 0$
Factorizando el término que está de la forma $ax^2 - bx + c = (ax - c)^2$
$\rightarrow x^2 + [2(y-2)^2] = 2$
Desapareciendo signos de agrupación y convirtiendo la igualdad en la unidad, dividimos toda la ecuación por el mismo número de la igualdad.

$\frac{x^2}{2}+\frac{2(y-2)^2}{2}=\frac{2}{2}\Rightarrow \boldsymbol{\frac{x^2}{2}+(y-2)^2=1}$
¿Recuerdan qué fórmula es ésa?
¡Es la de una elipse!
Se puede observar en la Figura 69, las tres gráficas que resultan del ejercicio, la primera figura es el resultado de las funciones que da el ejercicio, en la figura 2, es el resultado de lo que resulta del ejercicio y el tercero es la combinación de las tres ecuaciones, dos das y una que se encontró.

Ej # 73

Dibujar la superficie de nivel de la siguiente función $f: R^3 \to R$ $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$

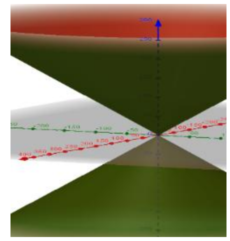


Figura 70

Sol:
Par calcular las distintas superficies de nivel, basta con igual la función a una constante, donde podemos decir que $f(x,y,z)=k$, e irle dando los distintos valores de la constante, para representar las distintas superficies de nivel de $f(x,y,z)$.
Por lo tanto se procede a igualar, $x^2+y^2-z^2=k\Rightarrow \boldsymbol{z^2=x^2+y^2-k}$
Entonces probar cuando $\boldsymbol{k=0}$
$z^2=x^2+y^2-k\Rightarrow z^2=x^2+y^2$, el cual da como gráfico un cono.
Entonces probar cuando $\boldsymbol{k=1}$
El resultado es la ecuación de un hiperboloide de una hoja. En general, se obtendrá una superficie similar si se toman valores $\boldsymbol{k>0.}$
También se pueden tomar valores $\boldsymbol{k<0}$, el resultado corresponderá a una hiperboloide de dos hojas.
Ejercicios:

- **i.** Describir las superficies de nivel de la siguiente función $f(x,y,z)=x^2+4y^2+z^2$
- **ii.** Dibujar las superficies de nivel de las siguientes funciones $f: R^3\to R$.
  - **a)** $f(x,y,z)=x-y+2$
  - **b)** $f(x,y,z)=x^2+y^2$
  - **c)** $f(x,y,z)=y(x+z)$
  - **d)** $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$

2.17- Tipos de funciones (Polinomiales, Racionales, etc.)

Un polinomio es una expresión algebraica (combinación de letras, números y signos de operaciones), que se representa de manera general así:

$$\boldsymbol{P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x^1+a_0}$$

Donde n es un entero no negativo y $a\neq 0$
Los números $\boldsymbol{a_0}, \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \cdots\ \boldsymbol{a_n}$**,** se llaman coeficientes del polinomio.

El número $\boldsymbol{a_0}$, es el coeficiente constante o término constante.

El número $\boldsymbol{a_n}$ es el coeficiente de la potencia más alta, es el coeficiente principal y el término $\boldsymbol{a_nx^n}$ es el término principal.

Ej # 74

Indicar el grado de la siguiente función polinómica $f(x)=3x^5-x^2+7x-1$

Sol:
La función es de quinto grado. Debido a que el máximo exponente es el número **5.**

Función Lineal: La función lineal tiene una forma general de la siguiente manera:

$$f(x) = mx + b \quad (m \neq 0)$$

La pendiente de la función es $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, es la pendiente de la recta no vertical P_1P_2.

La pendiente de una recta no vertical es la tangente del ángulo de inclinación $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = tan\alpha$.

La ecuación punto pendiente es la que pasa por un punto $(x_1 - y_1)$ y tiene una pendiente $\boldsymbol{m}$.

Entonces su ecuación es: $y - y_1 = m(x - x_1) \therefore \boldsymbol{y = m(x - x_1) + y_1}$

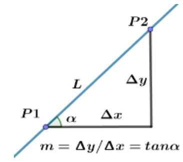


Figura 71

La función lineal también se puede obtener mediante la aplicación de la siguiente ecuación:$\boldsymbol{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$

Ej # 75

Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2,3)$ y tiene una pendiente $-\frac{2}{3}$

Sol:

vEs necesario que primero reconozcamos los valores de las variables que tenemos en la formula y los datos que da el problema. $x_1 = 2, \quad y_1 = 3 \quad m = -\frac{2}{3}$, se puede observar que la ecuación que se tiene que usar es la de punto pendiente. $\boldsymbol{y = m(x - x_1) + y_1}$

$$\boldsymbol{y = -\frac{2}{3}\,(x - 2) + 3 \rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} + 3 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}}$$

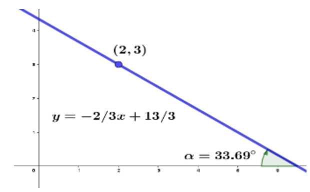


Figura 72

Ejercicios:

Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los siguientes puntos:

$p_1 = (-1,1) \quad m = -1$

$p_1 = (2,-3) \quad m = \frac{1}{2}$

$p_1 = (3,4) \quad p_2 = (-2,5)$

$p_1 = (-8,0) \quad p_2 = (-1,3)$

FUNCIONES CUADRÁTICAS Una función cuadrática es una función polinomial de grado 2. Entonces, una función cuadrática es una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$.

Una función cuadrática $(x) = ax^2 + bx + c$ puede expresarse en la **forma normal**

$f(x) = a(x - h)^2 + k$ completando el cuadrado. La gráfica de f es una parábola con vértice (h, k); la parábola abre hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo si $a < 0$.

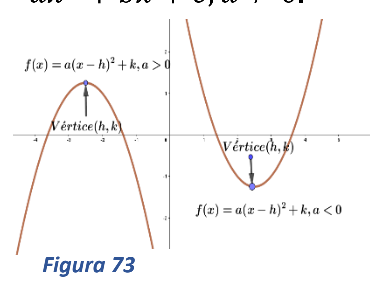


Figura 73

Para obtener el valor de h, también se puede usar $\boldsymbol{h} = -\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}$ y el valor de $\boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{4ac - b^2}}{\boldsymbol{4a}}$

Ej # 76

Dada la siguiente función $f(x) = 2x^2 - 12x + 23$, encontrar su vértice y construir su gráfico.

Sol:

Separación de términos y extrayendo factor común, resulta:

$f(x) = (2x^2 - 12x) + 23 \rightarrow f(x) = 2(x^2 - 6x) + 23$, realizando la competición de cuadrados $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$

$$f(x) = 2\left(x^2 - 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2\right) + 23 - 2\left(\frac{6}{2}\right)^2 \rightarrow f(x) = 2(x^2 - 6x + (3)^2) + 23 - 2(3)^2$$

$$f(x) = 2(x^2 - 6x + 9) + 23 - 18 \rightarrow f(x) = 2(x-3)^2 + 5$$

$$\therefore h = 3 \; y \; k = 5$$

Usando: $h = -\frac{b}{2a} \rightarrow h = \frac{-(-12)}{2*2} = \frac{12}{4} \therefore \boldsymbol{h = 3}$

$$k = \frac{4ac - b^2}{4a} \rightarrow k = \frac{4*2*23 - (12)^2}{4*2} \rightarrow k = \frac{184 - 144}{8}$$

$$\Rightarrow k = \frac{40}{8} \therefore \boldsymbol{k = 5}$$

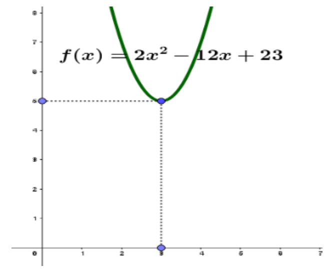


Figura 74

A como se puede apreciar de las do formas se llega a los mismos resultados.

VALOR MÁXIMO O MÍNIMO DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA Sea f una función cuadrática con forma estándar $f(x) = a(x-h)^2 + k$. El valor máximo o mínimo de f ocurre en $x = h$.

Si $a > 0$, entonces el valor mínimo de f es $f(x) = k$

Si $a < 0$, entonces el valor máximo de f es $f(x) = k$

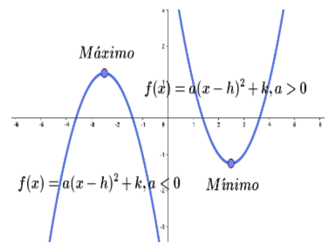


Figura 75

Ej # 77

Considerar la función $f(x) = -x^2 + x + 2$, expresarlo en:

a). la forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$

b). Trazar la gráfica

c). Encontrar el valor máximo ó mínimo de la función.

Sol:

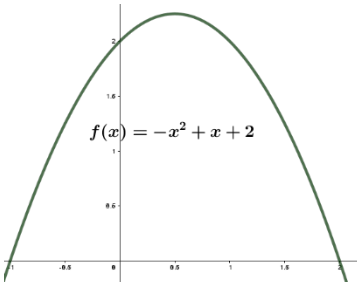
a). Realizando factorización y completación de cuadrado,

$$f(x) = -x^2 + x + 2 \rightarrow f(x) = -(x^2 - x) + 2$$

$$\Rightarrow f(x) = -\left(x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) + 2 - \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right) \rightarrow f(x) = -\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + 2 + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow f(x) = -\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \frac{9}{4} \therefore f(x) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

b). Gráfica



c). La función tiene un máximo en el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$

Ejercicios:

Nos dan una función cuadrática. (a) Exprese la función cuadrática en forma normal. (b) Encuentre su vértice y su(s) punto(s) de intersección x y y. (c) Trace su gráfica.

i. $f(x) = x^2 - 6x$
ii. $f(x) = 2x^2 + 6x$
iii. $f(x) = -x^2 + 6x + 4$
iv. $f(x) = -4x^2 - 16x + 3$
v. $f(x) = 6x^2 + 12x - 5$

Encuentre el valor máximo o mínimo de la función.

i. $f(x) = x^2 + x + 1$
ii. $f(t) = 100 - 49t - 7t^2$
iii. $f(s) = s^2 - 1.2s + 16$
iv. $h(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6$
v. $g(x) = 2x(x - 4) + 7$

División larga de polinomios

Si $P(x)$y $D(x)$son funciones polinomiales, con $D(x) \neq 0$, entonces existen polinomiales únicas $Q(x)$ y $R(x)$, donde $R(x)$ es 0 o de grado menor al grado $D(x)$, de modo que: $P(x) = D(x) * Q(x) + R(x)$.

Las funciones polinomiales $P(x)$ y $D(x)$ se denominan dividendo y divisor, respectivamente, $Q(x)$, es el cociente, y $R(x)$ es el residuo.

Ej # 78

Dividir $6x^2 - 26x + 12$ entre $x - 4$

Sol:

Ordenando el dividendo y el divisor

$6x^2 - 26x + 12$	$x - 4$
$-6x^2 + 24x$	$6x - 2$
$-2x + 12$	
$2x - 8$	
4	

El proceso de división termina cuando el último renglón es de menor grado que el divisor. El último renglón que contenga el **`residuo`**, y el renglón superior contienen el **`cociente`**. El resultado de la división puede interpretarse en cualquiera de dos formas.

Por tanto: $\frac{6x^2-26x+12}{x-4} = \boldsymbol{(x-4)(6x-2)+4}$

$6x^2 - 26x + 12 = \boldsymbol{(x-4)(6x-2)+4}$

$\boldsymbol{6x^2 - 26x + 12 =}$	$\boldsymbol{(x-4)}$	$\boldsymbol{(6x-2)}$	$\boldsymbol{+4}$

Dividendo	Divisor	Cociente	Residuo

TEOREMA DEL RESIDUO Si la función polinomial $P(x)$ se divide entre $x - c$, entonces el residuo es el valor $P(c)$.

Si el divisor del Algoritmo de División es de la forma $x - c$ para algún número real c, entonces el residuo debe ser constante (porque el grado del residuo es menor que el grado del divisor). Si a esta constante la llamamos r, entonces $P(x) = (x - c) * Q(x) + r$, sustituyendo x por c en esta ecuación, obtenemos $P(c) = (c - c) * Q(x) + r = 0, +r = r$, esto es, $P(c)$ es el residuo r.

Ej # 79

Sea $P(x) = 3x^5 + 5x^4 - 4x^3 + 7x + 3$
a). Encuentre el cociente y residuo cuando $P(x)$ es divisible por $x + 2$.
b). Use el teorema del Residuo para hallar $P(-2)$

Sol:
a). Como $x + 2 = x - (-2)$, la división sintética para este problema toma la siguiente forma:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -2 & 3 & 5 & -4 & 0 & 7 & 3 \\ \hline & & -6 & 2 & 4 & -8 & 2 \\ & 3 & -1 & -2 & 4 & -1 & 5 \end{array}$$

El cociente es $3x^4 - 1x^3 - 2x^2 + 4x - 1$, el residuo 5.
b). Use el teorema del Residuo $P(-2)$, es el Residuo cuando $P(x)$ se divide entre $x - (-2) = x + 2$, entonces se afirma que $P(-2) = 5$

Ej # 80

Sea $P(x) = x^3 - 7x + 6$ demuestre que $P(1) = 0$ y use este dato para factorizar $P(x)$ completamente.

Sol:
Haciendo la sustitución en la función dada encontramos $P(1) = (1)^3 - 7(1) + 6$
$\rightarrow P(1) = 1 - 7 + 6$, por el teorema del Factor esto significa que $x - 1$ es el factor de $P(x)$.
Usando la división sintética o factorizando tenemos que: $P(x) = x^3 - 7x + 6$
$\rightarrow x^3 - 7x + 6 = (x - 1)(x^2 + x - 6\,)$

Ej # 81

Encuentre una función polinomial de grado 4 que tenga ceros $-3, 0, 1\ y\ 5$.
Sol:
Usando el Teorema de Factor $x - (-3), x -\ 0, x -\ 1\ yx -\ 5$.
Donde todos ellos se convierten en factores de la función polinómica que se desea.
$P(x) = (x + 3)(x -\ 0)(x -\ 1)(x -\ 5) \therefore \boldsymbol{P(x) = x^4 - 3x^3 - 13x^2 + 15x.}$

Ejercicios:
Nos dan dos funciones polinomiales P y D. Use cualquier división sintética o larga para dividir $P(x)$ entre $D(x)$, y exprese el cociente $\frac{P(x)}{D(x)}$ en la forma $\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$.

1. $P(x) = x^2 + 4x - 8, \quad D(x) = x + 3$
2. $P(x) = x^3 + 6x + 5, \quad D(x) = x - 4$
3. $P(x) = 6x^3 + x^2 - 12x + 5, \quad D(x) = 3x - 4$

Encuentre el cociente y residuo usando división larga

I. $\frac{x^2-6x-8}{x-4}$
II. $\frac{x^3-x^2-2x+6}{x-2}$
III. $\frac{3x^4-5x^3-20x-5}{x^2+x+3}$
IV. $\frac{2x^5-7x^4-13}{4x^2-6x+8}$
V. $\frac{x^6+x^4+x^2+1}{x^2+1}$

Función Cúbica: Una función cúbica (o función de tercer grado) es una función polinómica de grado 3, es decir, que el mayor exponente del polinomio es x elevado a 3 (x^3):
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
Siendo $a \neq 0$

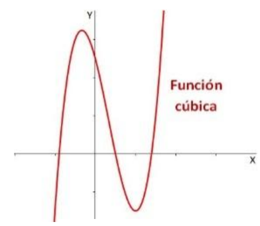


Figura 76

Ej # 82

Graficar la siguiente función: $f(x) = -x^3 + 8$
Sol:
Se puede trabajar por medio de tabulación

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	35	16	9	8	7	0	-19

$f(x) = -x^3 + 8$
$f(-3) = -(-3)^3 + 8 = 27 + 8 \rightarrow 35$
$f(-2) = -(-2)^3 + 8 = 8 + 8 \rightarrow 16$
$f(-1) = -(-1)^3 + 8 = 1 + 8 \rightarrow 9$
$f(0) = -(0)^3 + 8 = 0 + 8 \rightarrow 8$
$f(1) = -(1)^3 + 8 = -1 + 8 \rightarrow 7$
$f(2) = -(2)^3 + 8 = -8 + 8 \rightarrow 0$
$f(3) = -(3)^3 + 8 = -27 + 8 \rightarrow -19$

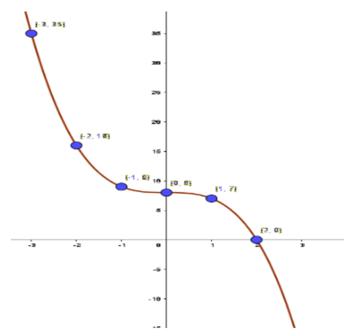


Figura 77

Ejercicios:
Graficar las siguientes funciones:

a. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
b. $f(x) = 2x^3 + 7x^2 + 6x - 5$
c. $f(x) = x^3 - 6$
d. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 8$

Funciones trigonométricas:
Función Seno: La función seno es la función definida por: $f(x) = sen\ x$.

Características de la función seno,

Figura 78

1. Dominio: IR Recorrido: $[-1, 1]$
2. El **período** de la función seno es 2π.
3. La función $y = sen\ x$ es impar, ya que $sen(-x) = -sen\ x$, para todo x en IR.
4. La gráfica de $y = sen\ x$ intercepta al eje X en los puntos cuyas abscisas son: $x\ = n\pi$ para todo número entero n.
5. El valor máximo de $senx$ es 1, y el mínimo valor es -1. La amplitud de la función $y = senx$ es 1.

Las gráficas de las funciones $y\ = Asen(Bx + C) + D$ considerando $B > 0$, se pueden obtener a partir de las gráficas de las funciones $y = senx,$ cuyas características se señalan a continuación:

Amplitud: $|A|$, que es el promedio de la diferencia entre los valores máximo $A * B > 0$ y mínimo $A * B < 0$. $\boldsymbol{Ranf} = [-|\boldsymbol{A}| + \boldsymbol{D}, |\boldsymbol{A}| + \boldsymbol{D}]$

Período: $\frac{2\pi}{B}$.

Desfase: $-\frac{C}{B}$, desplazamiento horizontal de $-\frac{C}{B}$ unidades a la derecha o a la izquierda, según si C es negativo o positivo, de la gráfica de) $y = A\ f(Bx) \therefore b = -\frac{C}{B};\ b, b + t_1, b + t_2 \cdots b + t_n$.

Desplazamiento vertical: traslación vertical en D unidades de la gráfica de $y = Af(Bx + C)$

Ej # 83

Graficar la función $y = -3sen\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

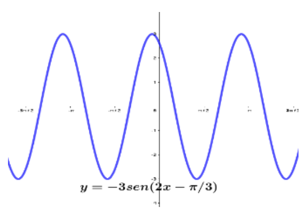
Sol:

Es necesario encontrar las partes de la función, para luego proceder a graficar

$y\ = Asen(Bx + C) + D$

Amplitud:$|\boldsymbol{A}|\ = |\boldsymbol{-3}| \rightarrow \boldsymbol{3};\ \boldsymbol{-3} * \boldsymbol{2}$ $\boldsymbol{= -6 < 0}$ ***Mínimo***

Período: $\frac{2\pi}{B} = \frac{2\pi}{2} = \pi.$

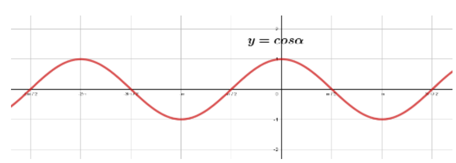


Desfase: $-\frac{C}{B} = -\frac{\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{2} \rightarrow \frac{\pi}{6}$

Desplazamiento vertical: $y = Af(Bx + C) = D = 0$

Función Coseno: La función coseno es la función definida por: $f(x) =\ cos\ x.$

Figura 79

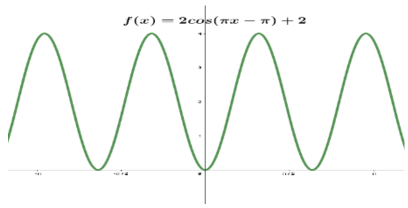


Características de la función coseno.
1. Dominio: IR Recorrido: $[-1, 1]$
2. Es una función periódica, y su período es $2\ \pi$.
3. La función $y = cosx$ es par, ya que $cos(-x) = cos\ x$, para todo x en IR.
4. La gráfica de $y = cosx$ intercepta al eje X en los puntos cuyas abscisas son: $x = 2\ \pi + n\pi$, para todo número entero n.
5. El valor máximo de $cos\ x$ es 1, y el valor mínimo valor es -1. La amplitud de la función $y = cosx$ es 1.

Las gráficas de las funciones $y = Acos(Bx + C) + D$ considerando $B > 0$, se pueden obtener a partir de las gráficas de las funciones $y = cosx$, cuyas características se señalan a continuación:
Amplitud: $|A|$, que es el promedio de la diferencia entre los valores máximo y mínimo.
Período: $\frac{2\pi}{B}$.
Desfase: $-\frac{C}{B}$, desplazamiento horizontal de $-\frac{C}{B}$ unidades a la derecha o a la izquierda, según si C es negativo o positivo, de la gráfica de) $y = A\,f(Bx)$.
Desplazamiento vertical: traslación vertical en D unidades de la gráfica de $y = Af(Bx + C)$

Ej # 84

Graficar la función $y = 2cos(\pi x - \pi) + 2$
Sol:
Amplitud: $|A| = |2| \rightarrow 2;\ 2 * \pi = 2\pi > 0\ Máximo$

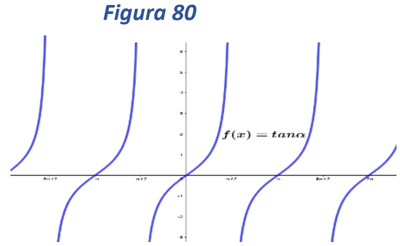


Período: $\frac{2\pi}{\pi} = 2.$

Desfase: $-\frac{(-\pi)}{\pi} = \frac{\pi}{\pi} = 1$

Desplazamiento vertical: $y = Af(Bx + C) = D = 2$
Función Tangente:
Esta función no está definida para cualquier valor de x. Como has podido ver los ángulos 90° ($\pi/2\ rad$) y 270°($3\pi/2\ rad$) no tienen tangente. Tampoco existe la tangente para los ángulos que se obtiene a partir de los anteriores sumándoles 360°.

Figura 80

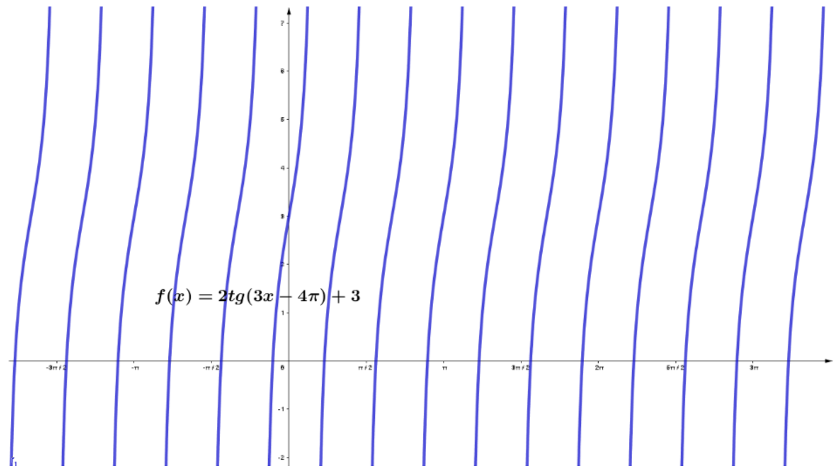


El **dominio** de la función tangente será: $D(f) = R \sim \{\frac{\pi}{2} + k * \pi\ siendo\ k \in Z\}$
Las rectas $y = \frac{\pi}{2} + k * \pi$, son **asíntotas** verticales de la función.
Los valores de la tangente se repiten cada π radianes (180°).

Ej # 85

Graficar la siguiente función $f(x) = 2tg(3x - 4\pi) + 3$
Sol:
Recordemos la forma que se representa la tangente $f(x) = \text{Atan}(Bx + C) + D$
$A = 2$
$B = 3$
$C = -4\pi$
$D = 3$
El periodo de la función se representa así: $T = \frac{\pi}{B} \rightarrow T = \frac{\pi}{3}$
El desplazamiento de la función es: $K = -\frac{C}{B} \rightarrow -\frac{(-4\pi)}{3} = \frac{4\pi}{3}$
Desplazamiento sobre el eje vertical $D = 3$

x	α	$Tan\alpha$	
	$\frac{-5\pi}{2}$	$\nexists$	
	-2π	0	
	$-\frac{3\pi}{2}$	$\nexists$	
	$-\pi$	0	
	0	0	
	π	0	
	$\frac{3\pi}{2}$	$\nexists$	
	2π	0	
	$\frac{5\pi}{2}$	$\nexists$	



En los valores, que no existen la tangente del ángulo, en esos puntos existe una asíntota vertical, para sacar los valores donde pasa la función tangente se hace lo siguiente $Bx + C = \alpha$

$$3x - 4\pi = \frac{-5\pi}{2} \rightarrow 3x = \frac{-5\pi}{2} + 4\pi \Rightarrow 3x = \frac{-5\pi + 8\pi}{2} \rightarrow 3x = \frac{3\pi}{2} \therefore x = \frac{\pi}{2}\ Asíntota$$

$$3x - 4\pi = -2\pi \rightarrow 3x = -2\pi + 4\pi \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}\ Pasa\ la\ gráfica$$

$$3x - 4\pi = -\frac{3\pi}{2} \rightarrow 3x = 4\pi - \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6}\ Asíntota$$

$$3x - 4\pi = -\pi \rightarrow 3x = 3\pi \Rightarrow x = \pi\ Pasa\ la\ gráfica$$

$$3x - 4\pi = 0 \rightarrow x = \frac{4\pi}{3}\ Pasa\ la\ gráfica$$

$3x - 4\pi = \pi \rightarrow x = \frac{5\pi}{3}$ Pasa la gráfica

$$3x - 4\pi = \frac{3\pi}{2} \rightarrow x = \frac{11\pi}{6}\ Asíntota$$

$$3x - 4\pi = \frac{5\pi}{2} \rightarrow x = \frac{13\pi}{6}\ Asíntota.$$

Ejercicios:

Graficar las siguientes funciones

- **I.** $y = 2sen(x + \pi) - 1$
- **II.** $y = -\frac{2}{\pi} sen\left(\frac{\pi}{2} t\right) + \frac{1}{\pi}$
- **III.** $y = 3\cos\left(\pi x + \frac{3}{\pi}\right)$
- **IV.** $y = tanx + 2$

Funcione Racionales:

Una función racional es el cociente o razón de dos polinomios de la forma $f(x) = \frac{p(x)}{r(x)}$, en donde p y p son polinomios. El dominio de una función racional es el conjunto de todos los números reales x para los que $r(x) \neq 0$.

Para graficar es tipo de función es necesario que se calculen las Asíntotas Vertical (A.V), Asíntotas Horizontales (A.H) y Asíntota Oblicua (A.O). Recordemos que una asíntota es una línea a la cual se acerca mucho la función pero que nunca la toca o corta.

A.V Se encuentra igualando a cero el denominador.

A.H Se encentra comparando los exponentes de los elementos de numerador y el denominador. El grado del numerador debe de ser igual o menor que el grado del denominador $f(x) = \frac{ax^n+b}{dx^n+k} \rightarrow A.H = \frac{a}{d}$. Cuando el grado del denominador es mayor se dice que no hay asíntota horizontal. En el caso que el grado del denominador sea mayor que el del numerador se dice que la $A.H = 0$

A.O Se encuentra aplicando la siguiente formulita $GN = GD + 1$, grado del numerador es igual al grado del denominador más la unidad. Convirtiéndose en una función linela de la forma $y = mx + n$. O más bien se divide la función.

Nota: Si el ejercicio tiene A.H entonces no tiene A.O

Ej # 86

Encontrar las Asíntotas de la de siguiente función $f(x) = \frac{2x^4-x^2+1}{x^2-4}$ y construir su gráfica.

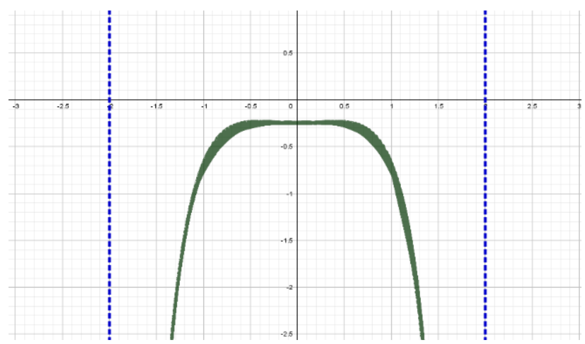
Sol:

A.H

$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm 2$

A.V

$$f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4} \therefore No\ existe\ A.V$$



A.O

$2x^4 - x^2 + 1$	$x^2 - 4$
$-2x^4 + 8x^2$	$2x^2 + 7$
$7x^2 + 1$	
$-7x^2 + 28$	
29	

Ejercicios:

Encontrar las Asíntotas y graficar las siguientes funciones:

i. $f(x) = \frac{x}{x+4}$

ii. $f(x) = \frac{x^3}{x^2+3x-10}$

iii. $f(x) = \frac{x^3+1}{x^3+x}$

iv. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+4}}$

2.18- Problemas que conducen a funciones de varias variables.

Ej # 87

Con 1000 metros de alambre, deseamos construir un cercado de forma rectangular que tenga la máxima área posible. ¿Cuáles serán sus dimensiones?

Sol:

Sea b la base del rectángulo y h su altura,

$\Rightarrow$ Tenemos $1000 = 2b + 2h$.

Simplificando, $500 = b + h$.

Despejando una de las variables se obtiene: $b = 500 - h$.

El área del rectángulo que se quiere maximizar es: $A_M = b * h$.

Sustituyendo el valor de b en esta última expresión:

$A_M = h(500 - h) = -h^2 + 500h$.

Se trata de una función cuadrática con las ramas hacia abajo, pues $a < 0$.

Si se calculan las coordenadas del vértice, se obtiene el valor de h que hace su superficie máxima.
$h_{máx} = -\frac{500}{-2} = \mathbf{250\ m}$;
$A_M = (250)^2 + 500 * 250 = 62{,}500\ m^2$.
Sustituyendo h en la expresión de b, resulta $b_{máx} = 500 - 250 = 250m$.
Por tanto, para obtener un cercado rectangular de superficie máxima con $1000\ m$ de alambre, la base y la altura deben medir $250\ m$ cada una.

Ej # 88

Dos parábolas cortan el eje de abscisas en los puntos $(5, 0)$ y $(8, 0)$. Razona si son iguales o pueden ser distintas.

Sol:

La ecuación de la parábola es de la forma $y = ax^2 + bx = c$. Esta parábola debe pasar por los puntos $(5, 0)$ y $(8, 0)$.

Sustituyendo los puntos se obtiene: $\begin{cases} 0 = 25a + 5b + c \\ 0 = 64a + 8b + c \end{cases}$

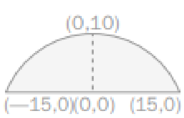
Restando ambas ecuaciones, despejando y simplificando se obtiene: $b = -13a$, y, por tanto, $c = 40a$. La ecuación es: $y = ax^2 - 13ax + 40a$ (a es un número real). Cualquier parábola de esta forma pasará por los puntos $(5, 0)$ y $(8, 0)$.

Ejercicios:

i. Un invernadero visto de frente presenta la forma de la gráfica de la función $f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2$.

a) ¿A qué tipo de gráfica corresponde esa forma?
b) Calcula la altura máxima del invernadero.

ii. Noelia y Miguel están observando la maqueta de un puente que tiene forma de parábola y pretenden calcular su expresión algebraica. Para ello miden la distancia entre los puntos de las bases y la altura máxima, obteniendo el siguiente dibujo:



¿Cuál es la función cuya gráfica se corresponde con la forma del puente?

Grid[{{region, plot, enneper}, {bunnysurface, cubish, sphere}, {bowl, contour, spiral}}]

Bibliografía

1. Thomas, Jr, George B. Cálculo, una variable, undécima edición, Pearson Educación, México, 2006.
2. Finney , Roos L. Cálculo de una Variable, Pearson Educación, México, 2000.
3. Louis Leithold, El Cálculo, Séptima Edición, Oxford University Press México.
4. Matemáticas 1, EJERCICIOS RESUELTOS: Funciones de varias variables.
5. Elena Álvarez Sáiz. Dpto. Matemática Aplicada y C. Computación.Universidad de Cantabria. S/f.
6. Cálculo para la ingeniería. Salvador Vera. 9 de enero de 2005.
7. Cálculo Diferencial e Integral de Funciones de una Variable. Francisco Javier Pérez González, Dep. de Análisis Matemático Universidad de Granada.
8. Tom M. Apostol. Calculus Volumen I, Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al algebra lineal. Segunda Edición. Editorial REVERTÉ, S. A